

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Matemáticas



**Superficies de Riemann hiperbólicas en
sentido de Gromov.**

Ana Portilla Ferreira

Diciembre de 2005

Programa de Doctorado en Ingeniería Matemática

Director de tesis: José Manuel Rodríguez García

*A mi familia,
aquí en la tierra como en el cielo.*

Agradecimientos

A José Manuel, por haberse empeñado, a base de cariño, en hacer de mí una matemática. (¡Casi lo consigue...!)

Al Departamento de Matemáticas de la Universidad Carlos III de Madrid, por consentirme el lujo de dedicarme a la investigación.

A todos mis alumnos, “mis niños”, por servirme de conejillos de indias para entrenarme en la profesión que más me gusta en este mundo... y por permitirme ejercitar la virtud cristiana de la paciencia.

A mi madre, Angeles, por hacer honor a su nombre... y por sus tortillas de patata.

A mi hermano Miguel, por asumir el papel de padre sustituto. Y porque aunque me hubieran dejado elegir entre todos los candidatos del mundo, no podría haberlo hecho mejor.

A mis hermanas Sara y Eva, porque el hecho de que no compartamos genes no es importante, y sólo se debe a que no tuvimos los mismos padres.

A mi sobrina Irene, que me quiere tanto que se cree que puede encontrarme un novio de su edad.

A mi sobrina Paula, a quien todavía no conozco, pero a la que estoy segura de que voy a adorar y malcriar.

A todos mis amigos, por ser tan maravillosamente incoherentes como para permanecer a mi lado a pesar de todo.

A mis compañeros de baile, conocidos y desconocidos, por ayudarme sin saberlo a no necesitar un psiquiatra (¿o sí lo necesito?)

Y, finalmente, y con permiso de todos los mencionados hasta ahora, a mi padre, porque sé que nadie, ni yo misma, se alegraría hoy por mí como él. Como diría mi hermano: “Va por ti, Maestro...”

Índice

1. Introducción	1
1.1. Espacios hiperbólicos en sentido de Gromov	3
1.2. Métricas en dominios planos	10
1.2.1. Métrica conforme	10
1.2.2. Métrica de Poincaré	11
1.3. Superficies de Riemann	13
1.3.1. Nociones generales	13
1.3.2. Obstáculos topológicos	16
1.3.3. Otros conceptos interesantes	18
1.4. Estructura de la tesis	20
1.5. Notación	20
2. Hiperbolicidad mediante la descomposición de espacios métricos	21
2.1. Introducción	21
2.2. Resultados	22
2.3. Demostración de lemas técnicos	44
3. El papel de punturas y foniles en la hiperbolicidad	55
3.1. Introducción	55
3.2. Resultados en espacios métricos	56

3.3. Resultados en superficies de Riemann	63
4. Futuras líneas de investigación	87
Bibliografía	89

Capítulo 1

Introducción

El tema central de esta memoria es el estudio de la hiperbolicidad en sentido de Gromov, principalmente de las superficies de Riemann, pero también de espacios métricos más generales.

Según el contexto, la palabra *hiperbolicidad* puede hacer referencia a diferentes conceptos, tales como la existencia de función de Green o la curvatura negativa. Nosotros, a partir de ahora, siempre nos referiremos a la hiperbolicidad *en sentido de Gromov*. Se trata de un novedoso campo de trabajo que fue iniciado por el propio Gromov en los años setenta. Los llamados *espacios de Gromov* o también *espacios hiperbólicos en sentido de Gromov* surgieron, precisamente, buscando una forma de aunar las propiedades comunes entre grafos y variedades con curvatura negativa (ver por ejemplo [24], [32] y [33]). Se pueden consultar también a este respecto los trabajos de Kanai de los años ochenta (ver [22],[23] y [24]).

La idea clave consiste en crear un marco de trabajo suficientemente general que nos permita abstraernos de conceptos tales como “dimensión”, “estructura diferenciable” o “métrica riemanniana”. En definitiva, se trata de trabajar simplemente en el contexto de espacios métricos. Por esta razón pensamos que los espacios de Gromov son un marco adecuado que permite generalizar resultados interesantes sobre superficies de Riemann.

Aunque más adelante daremos unos cuantos ejemplos interesantes de espacios hiperbólicos (ver 1.9), la literatura existente al respecto no proporciona criterios generales que permitan decidir cuándo un espacio es hiperbólico. En cierto sentido esta limitación puede soslayarse, ya que pueden obtenerse interesantes resultados (por ejemplo sobre el comportamiento de las

geodésicas), para espacios que no son hiperbólicos pero cuyo recubridor universal sí lo es (ver [27]). Y es evidente que pedir que el recubridor sea hiperbólico es una hipótesis mucho más débil que pedir que lo sea el propio espacio. Por ejemplo, si una variedad M tiene curvatura seccional acotada superiormente por una constante $c < 0$, nada garantiza que sea hiperbólica. Sin embargo, su recubridor universal sí lo es por ser simplemente conexo (ver 1.9.(4)) y también tiene curvatura seccional $K \leq c < 0$, puesto que el recubridor y el espacio son localmente isométricos, y las isometrías locales preservan la curvatura.

La caracterización de espacios hiperbólicos es un problema que aún permanece abierto. Recientemente se han publicado importantes resultados (ver [5] y [8]) que estudian la hiperbolicidad en dominios acotados de \mathbb{R}^n con la métrica quasihiperbólica $\lambda(z) = 1/d(z, \partial\Omega)$. De hecho, en [5] se da una caracterización de la hiperbolicidad en este contexto, que aunque resulta complicada de utilizar en la práctica, supone una simplificación notable.

El objetivo de esta tesis es, precisamente, mostrar nuestros trabajos encaminados a conseguir la caracterización de espacios hiperbólicos, y lo hacemos en dos contextos: en espacios métricos geodésicos generales (ver Capítulo 2), y en superficies de Riemann con su métrica de Poincaré (ver Capítulo 3).

Según se podrá apreciar en las definiciones de hiperbolicidad que daremos a continuación (ver por ejemplo la Definición 1.6), éste no es un concepto local, sino *global*. Sin embargo es evidente que en la práctica es mucho más fácil trabajar localmente. Por eso hemos encaminado nuestro trabajo a intentar conseguir información sobre la hiperbolicidad de un espacio (es decir, información *global*), a partir de la información *local* disponible sobre el propio espacio.

En este sentido hemos seguido una técnica muy utilizada en la teoría de superficies de Riemann: *cortar y pegar*. Se trata básicamente de descomponer un espacio métrico X en unión de subespacios X_n , estudiar la hiperbolicidad en cada uno de estos subespacios y proporcionar después técnicas de pegado que garanticen la hiperbolicidad en el espacio de partida X . Así, bajo condiciones bastante generales, hemos conseguido dos resultados principales:

El Teorema 2.3 permite pegar infinitos espacios X_n preservando la hiperbolicidad, siempre que no se generen obstáculos topológicos. De hecho, el espacio X resultante al unir estos espacios es hiperbólico si y sólo si los componentes X_n son uniformemente hiperbólicos.

Por otra parte, el Teorema 2.14 permite crear obstáculos topológicos arbitrarios al conectar las piezas si se verifican unas hipótesis métricas apropiadas. De hecho, una de las consecuencias de este teorema es que el espacio es hiperbólico si y sólo si lo es un cierto grafo asociado a éste

y las piezas conectadas son uniformemente hiperbólicas.

Los resultados anteriores nos serán de gran utilidad a la hora de estudiar la hiperbolicidad de superficies de Riemann en el Capítulo 3. Como ya hemos mencionado antes, una técnica muy habitual a la hora de trabajar con superficies de Riemann es la de *cortar y pegar*. Otra igualmente estándar consiste en eliminar de la superficie conjuntos cerrados. Nosotros nos hemos planteado estudiar de qué manera influye esta manipulación en la hiperbolicidad, y ello nos ha llevado a analizar el papel que juegan en este sentido punturas y foniles, e incluso finales más generales.

El Teorema 3.9 es otro de los resultados destacables de esta tesis. Afirma que *cualquier* bola de radio $r \leq \frac{1}{2} \log 3$ en *cualquier* superficie de Riemann es, necesariamente, simple o doblemente conexa. Además de su interés intrínseco, ha resultado ser una herramienta crucial en la demostración del Teorema 3.41, que estudia el papel de las punturas en la hiperbolicidad.

Tenemos también algunos resultados sobre estabilidad de la hiperbolicidad de superficies de Riemann (ver por ejemplo el Teorema 3.19 o el Corolario 3.42, cuya conclusión puede resultar sorprendente). En todos los casos nos hemos preocupado especialmente por proporcionar también un adecuado control de las constantes involucradas.

1.1. Espacios hiperbólicos en sentido de Gromov

Empezaremos dando unas nociones básicas sobre este tipo de espacios, y, para ello, utilizaremos la notación de [16]. Remitimos a esta misma referencia para información más detallada y resultados más específicos.

Como ya hemos mencionado anteriormente, aunque el concepto de hiperbolicidad se utiliza en diferentes contextos con significados muy diferentes, a lo largo de este trabajo solamente utilizaremos la palabra *hiperbólico* en el sentido de la Definición 1.6.

Veamos unas cuantas definiciones previas:

Definición 1.1. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ es una curva continua en un espacio métrico (X, d) , puede definirse la longitud de γ como

$$L(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \right\}.$$

Se dice que γ es una geodésica (o también geodésica minimizante) si es una isometría, es

decir, $L(\gamma|_{[s,t]}) = d(\gamma(s), \gamma(t)) = |t - s|$ para todos $s, t \in [a, b]$.

Se dice que γ es una geodésica local si para todo $t \in [a, b]$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que la restricción de γ a $[t - \varepsilon, t + \varepsilon] \cap [a, b]$ es una geodésica.

Se dice que X es un espacio métrico geodésico si para todos $x, y \in X$ existe al menos una geodésica uniendo x e y . Denotaremos por $[x, y]$ cualquiera de tales geodésicas (dado que las geodésicas no son necesariamente únicas, esta notación es ambigua, pero conveniente).

Un espacio métrico geodésico es propio si toda bola cerrada es compacta.

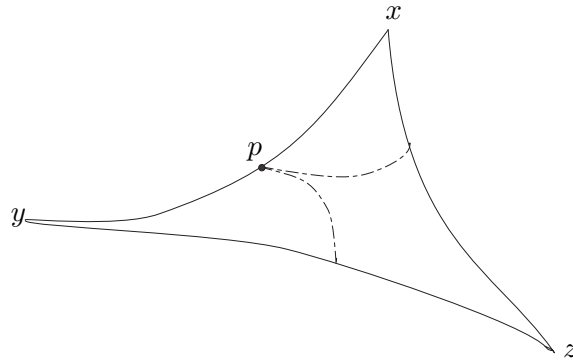
Es obvio que todo espacio métrico geodésico es conexo por arcos.

Observación 1.2. A lo largo del presente trabajo utilizaremos la palabra geodésica con el sentido de geodésica global o curva minimizante, a menos que hablemos de geodésicas simples cerradas, un tipo especial de geodésicas locales que, obviamente, no pueden ser minimizantes.

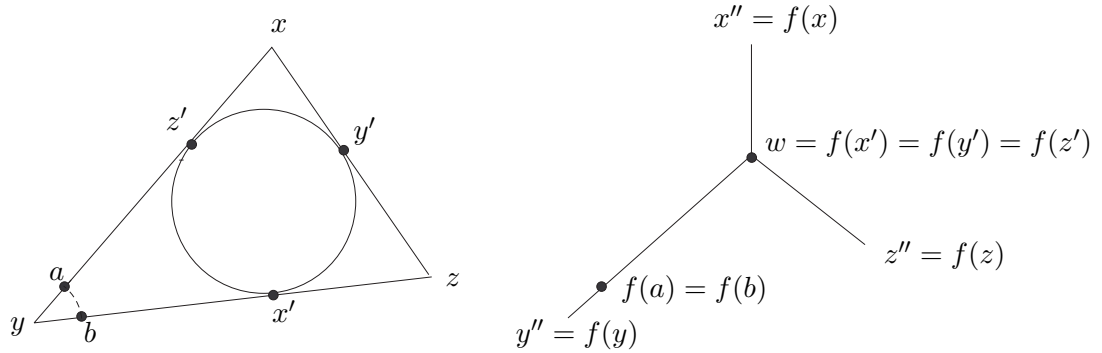
Definición 1.3. Si X es un espacio métrico geodésico y $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$, con $J_j \subseteq X$, decimos que J es δ -thin si para todo $x \in J_i$ se verifica que $d(x, \cup_{j \neq i} J_j) \leq \delta$. Si $x_1, x_2, x_3 \in X$, un triángulo geodésico $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ es la unión de tres geodésicas $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ y $[x_3, x_1]$. Se dice que el espacio X es δ -thin (o también que satisface la condición de Rips con constante δ) si todo triángulo geodésico de X es δ -thin.

Llamaremos biángulo a un triángulo con dos vértices idénticos. Obviamente todo biángulo de un espacio δ -thin, es δ -thin.

Observación 1.4. Todo polígono geodésico de n lados contenido en un espacio δ -thin, es $(n - 2)\delta$ -thin. Para demostrarlo es suficiente partir el polígono en triángulos y aplicar a éstos la Definición 1.3.



Definición 1.5. Sean $T = \{x, y, z\}$ un triángulo geodésico en un espacio métrico geodésico X y T_E un triángulo euclídeo cuyos lados tienen la misma longitud que los de T . Puesto que no hay confusión posible, utilizaremos la misma notación para los puntos correspondientes entre T y T_E . El círculo máximo inscrito en T_E interseca al lado $[x, y]$ (respectivamente $[y, z]$, $[z, x]$) en un punto z' (respectivamente x' , y') de tal forma que $d(x, z') = d(x, y')$, $d(y, x') = d(y, z')$ y $d(z, x') = d(z, y')$. Llamaremos puntos internos de T a los puntos x', y', z' . Hay una única isometría f del triángulo T sobre un trípode (árbol con un vértice w de grado 3, y tres vértices x'', y'', z'' de grado uno, tal que $d(x'', w) = d(x, z') = d(x, y')$, $d(y'', w) = d(y, x') = d(y, z')$ y $d(z'', w) = d(z, x') = d(z, y')$). Se dice que el triángulo T es δ -fine si $f(p) = f(q)$ implica que $d(p, q) \leq \delta$. El espacio X es δ -fine si todo triángulo geodésico de X es δ -fine.



Definición 1.6. Fijemos un punto w en un espacio métrico (X, d) . Definimos el producto de Gromov de $x, y \in X$ con respecto al punto base w como

$$(x|y)_w := \frac{1}{2} (d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)) \geq 0.$$

Decimos que el espacio métrico (X, d) es δ -hiperbólico ($\delta \geq 0$), si

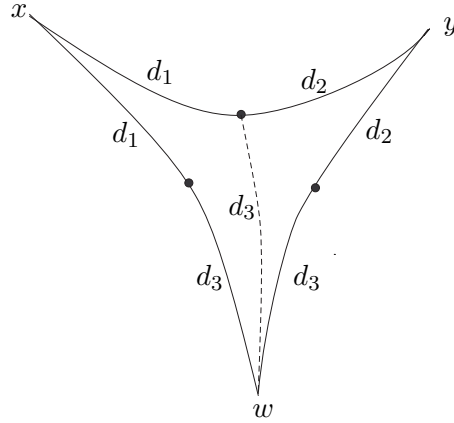
$$(x|z)_w \geq \min \{ (x|y)_w, (y|z)_w \} - \delta,$$

para todos $x, y, z, w \in X$. Decimos que X es hiperbólico (en sentido de Gromov) si el valor de δ no es relevante.

Observación 1.7. El punto base elegido no es importante: si un espacio es hiperbólico para un cierto punto base w , puede garantizarse que lo es también para cualquier otro. Eso sí, el valor de la constante de hiperbolicidad δ depende del punto base elegido.

Aunque es difícil aplicar la intuición para encontrar un significado geométrico a esta última definición, sí que lo hay: en espacios hiperbólicos, $(x|y)_w$ es comparable a la distancia entre el

punto base w y un arco geodésico que una x con y (ver [16, p. 38]). La razón de fondo, es que en este tipo de espacios las geodésicas tienden a curvarse hacia el interior. Si nos fijamos en la siguiente figura, las longitudes que aparecen etiquetadas con los mismos valores son comparables; basta pues con aplicar la definición de producto de Gromov para llegar a la conclusión aquí apuntada.

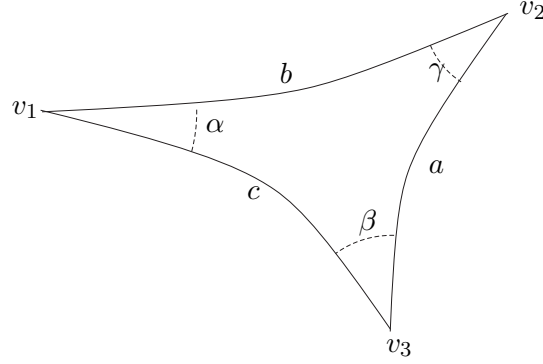


Sabemos que en un espacio euclídeo, el producto escalar entre dos vectores x e y es cero si y sólo si son perpendiculares entre sí. Sin embargo, tanto si aplicamos la definición rigurosa del producto de Gromov como si manejamos la interpretación geométrica que acabamos de ver, $(x|y)_w$ es cero cuando el punto base pertenece a una geodésica que une x con y . Es decir, en la teoría de espacios hiperbólicos, el ángulo que juega un papel fundamental no es $\pi/2$, sino π .

Veamos a continuación otra interpretación geométrica del producto de Gromov en el disco unidad, con el objetivo de poner de manifiesto que, aunque en este tipo de espacios sólo manejamos distancias, la propiedad de hiperbolicidad permite, en cierto sentido, “medir” ángulos:

Igual que ocurre para los triángulos euclídeos, existen fórmulas que relacionan los ángulos interiores de un triángulo contenido en el plano hiperbólico, con las longitudes de los lados del mismo. De esta forma, dado el triángulo de la figura, se verifica la que se denomina “ley hiperbólica de los cosenos”

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha .$$



En el caso particular $\alpha = \pi/2$, tenemos la versión hiperbólica del Teorema de Pitágoras: $\cosh a = \cosh b \cosh c$ (es decir, el coseno hiperbólico de la hipotenusa es igual al producto de los cosenos hiperbólicos de los catetos).

Para un ángulo α cualquiera (no necesariamente $\pi/2$), si las longitudes hiperbólicas a, b y c son suficientemente grandes como para que la exponencial sea una buena aproximación de las funciones hiperbólicas, podemos reemplazar la igualdad por la relación aproximada $\frac{1}{2}e^a \approx \frac{1}{4}e^{b+c}(1 - \cos \alpha)$, de donde se deduce que $e^a \approx e^{b+c} \sin^2(\alpha/2)$; tomando logaritmos obtenemos $\frac{1}{2}(b + c - a) \approx \log \frac{1}{\sin(\alpha/2)}$, donde $b + c - a = d(v_1, v_2) + d(v_1, v_3) - d(v_2, v_3) = 2(v_2|v_3)_{v_1}$, y por lo tanto $(v_2|v_3)_{v_1} \approx \log \frac{1}{\sin(\alpha/2)}$. De esta forma queda patente la estrecha relación que existe entre el producto de Gromov de dos puntos y el ángulo que forman las geodésicas que los unen con el punto base. Es decir, simplemente manejando distancias (recordemos que la definición del producto de Gromov no involucra ningún otro concepto), somos capaces de medir ángulos en el plano hiperbólico. La teoría de espacios hiperbólicos pone de manifiesto que este razonamiento válido para el plano hiperbólico, puede extenderse, en cierto sentido, a espacios métricos hiperbólicos generales.

El siguiente resultado establece la equivalencia entre condición de Rips (Definición 1.3), cualidad de *fine* (Definición 1.5) e hiperbolicidad (Definición 1.6):

Teorema 1.8. ([16, p. 41]) *Sea X un espacio métrico geodésico.*

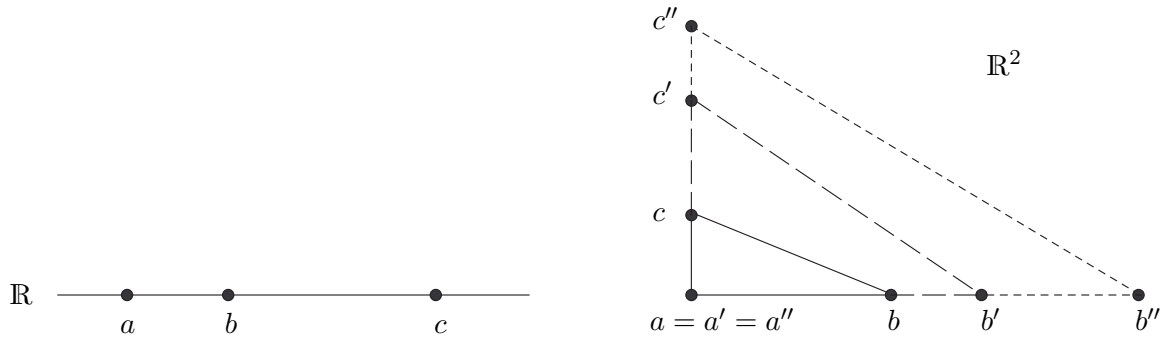
- (1) *Si X es δ -hiperbólico, entonces es 4δ -thin y 4δ -fine.*
- (2) *Si X es δ -thin, entonces es 4δ -hiperbólico y 4δ -fine*
- (3) *Si X es δ -fine, entonces es 2δ -hiperbólico y δ -thin.*

Veamos a continuación algunos ejemplos interesantes de espacios hiperbólicos:

Ejemplo 1.9.

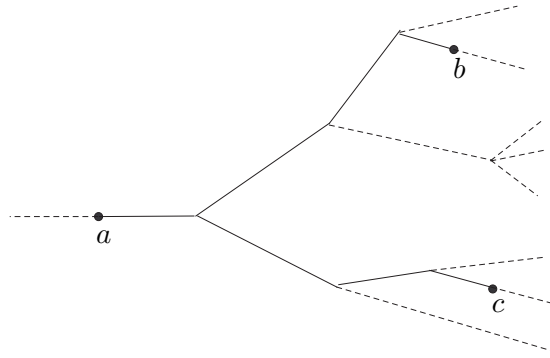
(1) \mathbb{R}^n con la métrica euclídea es hiperbólico si y sólo si $n = 1$.

Es evidente que todo punto de un triángulo contenido en la recta real pertenece simultáneamente a dos lados, y, por tanto, podemos concluir que \mathbb{R} es 0-thin. También es obvio que en el plano se pueden trazar triángulos de diámetro arbitrariamente grande, por lo que con su métrica euclídea no es posible que \mathbb{R}^2 sea hiperbólico. De forma similar puede razonarse para dimensiones superiores.



(2) Todo árbol con aristas de longitud arbitraria es 0-hiperbólico (ver, por ejemplo, [16, p. 29]).

La afirmación es evidente porque se trata de una generalización de lo que ocurre en la recta real: todo punto de un triángulo contenido en un árbol pertenece simultáneamente a dos lados.



(3) Todo espacio métrico acotado X es $(\text{diam } X)$ -hiperbólico (ver, por ejemplo, [16, p. 29]).

(4) Toda variedad riemanniana completa simplemente conexa con curvatura seccional acotada superiormente por una constante $-k$, con $k > 0$, es hiperbólica (ver, por ejemplo, [16, p. 52]).

Vamos a introducir a continuación un tipo de aplicaciones que juegan un papel fundamental en la teoría de espacios hiperbólicos.

Definición 1.10. *Una función entre dos espacios métricos $f : X \longrightarrow Y$ es una quasi-isometría si existen constantes $a \geq 1$, $b \geq 0$ con*

$$\frac{1}{a} d_X(x_1, x_2) - b \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq a d_X(x_1, x_2) + b, \quad \text{para todos } x_1, x_2 \in X.$$

Una función de este tipo se llama (a, b) -quasi-isometría. Decimos que la imagen de f es ε -full (para algún $\varepsilon \geq 0$) si, para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ con $d_Y(y, f(x)) \leq \varepsilon$. Decimos que X e Y son quasi-isométricamente equivalentes si existe una quasi-isometría entre X e Y , con imagen ε -full, para algún $\varepsilon \geq 0$. Una (a, b) -quasigeodésica en X es una (a, b) -quasi-isometría entre un intervalo de \mathbb{R} y X . Un (a, b) -segmento quasigeodésico en X es una (a, b) -quasi-isometría entre un intervalo compacto de \mathbb{R} y X .

Observemos que una quasi-isometría puede ser incluso discontinua.

Observación 1.11. *Es bien conocido (ver por ejemplo [22], [23]) que la equivalencia quasi-isométrica es una relación de equivalencia. De hecho, si $f : X \longrightarrow Y$ es una (a, b) -quasi-isometría con imagen ε -full, entonces existe una función $g : Y \longrightarrow X$ que es una $(a, 2a\varepsilon + ab)$ -quasi-isometría. En particular, si f es una (a, b) -quasi-isometría suprayectiva, entonces g es una (a, ab) -quasi-isometría (en este caso podemos elegir como $g(y)$ cualquier punto de $f^{-1}(y)$).*

Ejemplo 1.12. *$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, con $f(x) = [x]$ es una $(1, 1)$ -quasi-isometría.*

En nuestro contexto las quasi-isometrías son especialmente importantes puesto que se trata de una clase de aplicaciones que preserva la hiperbolicidad:

Teorema 1.13. ([16, p. 88]) *Consideremos una (a, b) -quasi-isometría entre dos espacios métricos geodésicos $f : X \longrightarrow Y$. Si Y es δ -hiperbólico, entonces X es δ' -hiperbólico, donde δ' es una constante que sólo depende de δ , a y b . Además, si la imagen de f es ε -full para algún $\varepsilon \geq 0$, entonces X es hiperbólico si y sólo si lo es Y .*

Es bien conocido que si f no es ε -full, la hiperbolicidad de X no implica la hiperbolicidad de Y : basta considerar la inclusión de \mathbb{R} en \mathbb{R}^2 (que es, de hecho, una isometría).

Definición 1.14. Consideremos $H > 0$, X un espacio métrico y los subconjuntos $Y, Z \subseteq X$. El conjunto $V_H(Y) := \{x \in X : d(x, Y) \leq H\}$ se llama el H -entorno de Y en X . La distancia de Hausdorff de Y a Z se define como

$$\mathcal{H}(Y, Z) := \inf\{H > 0 : Y \subseteq V_H(Z), Z \subseteq V_H(Y)\}.$$

A continuación, un resultado de gran belleza además de utilidad práctica:

Teorema 1.15. ([16, p.87]) Para cada $\delta \geq 0$, $a \geq 1$ y $b \geq 0$, existe una constante $H = H(\delta, a, b)$ con la siguiente propiedad:

Sea X un espacio métrico geodésico δ -hiperbólico y g una (a, b) -quasigeodésica comenzando en x y terminando en y . Si γ es una geodésica cualquiera que une x con y , entonces $\mathcal{H}(g, \gamma) \leq H$.

Esta propiedad se conoce como *estabilidad geodésica*. En [7], Mario Bonk prueba que, de hecho, la estabilidad geodésica es equivalente a la hiperbolicidad.

A lo largo del presente trabajo trataremos con subespacios de un espacio métrico geodésico X . Hay una forma natural de definir la distancia en estos espacios:

Definición 1.16. Si X_0 es un subconjunto conexo por arcos de un espacio métrico geodésico (X, d) , entonces podemos asociarle la llamada distancia intrínseca

$$d_{X_0}(x, y) := d_X|_{X_0}(x, y) := \inf \left\{ L(\gamma) : \gamma \subset X_0 \text{ es una curva continua que une } x \text{ con } y \right\} \geq d_X(x, y).$$

1.2. Métricas en dominios planos

1.2.1. Métrica conforme

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio plano (es decir, un conjunto abierto y conexo en \mathbb{C}). Una *métrica riemanniana* definida en Ω , viene dada por una expresión de la forma $ds^2 = E(x, y)dx^2 + 2F(x, y)dxdy + G(x, y)dy^2$, donde E, F y G son funciones \mathcal{C}^∞ y además se verifica que $EG - F^2 > 0$ en Ω . Se dice que la métrica es *conforme* (porque la identidad de Ω con su métrica euclídea, definida sobre Ω con la métrica ds , preserva ángulos, aunque no longitudes) cuando $F = 0$ y $E = G$. En este caso, puede escribirse $ds^2 = \lambda^2(x, y)(dx^2 + dy^2)$ y λ se denomina *densidad de la métrica*.

Una métrica conforme siempre es múltiplo de la euclídea, es decir, $ds = \lambda(x, y)|dz|$, donde $|dz|$ denota la longitud euclídea.

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ es una curva continuamente diferenciable a trozos, se define su longitud con respecto a la métrica λ como:

$$L_\lambda(\gamma) := \int_\gamma \lambda(z)|dz|. \quad (1.1)$$

Dados dos puntos $p, q \in \Omega$, se define la *distancia en la métrica λ entre p y q* como

$$d_\lambda(p, q) = \inf\{L_\lambda(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}_\Omega(p, q)\},$$

siendo $\mathcal{C}_\Omega(p, q)$ el conjunto formado por todas las curvas continuamente diferenciables a trozos parametrizadas de forma que $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. Si la métrica se sobreentiende, se puede denotar también como d_Ω .

Es posible demostrar que la función $d_\lambda : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una distancia y (Ω, d_λ) un espacio métrico. En el caso particular de que $\lambda \equiv 1$ y $\Omega = \mathbb{C}$, entonces d_λ es, precisamente, la distancia euclídea.

Observemos que, una vez introducido el concepto de *distancia*, sería posible volver a definir la longitud de una curva de forma similar a como hicimos en la Definición 1.1, puesto que ahora hay estructura de espacio métrico que lo permite. Por supuesto, la longitud así obtenida coincide con la definida mediante la expresión 1.1.

En el contexto de dominios planos, la curvatura, que es un invariante por aplicaciones conformes, se puede calcular mediante la fórmula:

$$K(z) = \frac{-\Delta \log \lambda(z)}{\lambda^2(z)}. \quad (1.2)$$

1.2.2. Métrica de Poincaré

En el disco unidad abierto $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ puede definirse una métrica conforme mediante la siguiente densidad:

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}. \quad (1.3)$$

A esta métrica se le suele denominar *hiperbólica* o *de Poincaré*.

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$ es una curva continuamente diferenciable a trozos, según lo que hemos visto

ya en la sección anterior, se define su longitud con respecto a esta métrica como:

$$L_{\mathbb{D}}(\gamma) := \int_{\gamma} \lambda_{\mathbb{D}}(z) |dz| = \int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt.$$

Aplicando la fórmula (1.2) se puede demostrar que el disco unidad dotado de la métrica (1.3) es una superficie con curvatura constante negativa. El coeficiente 2 del numerador en la función densidad aparece por una cuestión de normalización, precisamente para conseguir que la curvatura sea -1 . Sin esta constante, la curvatura sería -4 .

Poincaré descubrió que las isometrías del disco unidad con la métrica hiperbólica son las transformaciones de Möbius del disco en sí mismo, o sea el conjunto:

$$M\ddot{o}(\mathbb{D}) = \left\{ T : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \text{ tal que } T(z) = e^{i\theta} \frac{z + a}{1 + \bar{a}z} \text{ con } a \in \mathbb{D} \text{ y } \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Es posible obtener una fórmula explícita para calcular la distancia hiperbólica entre dos puntos del disco unidad (ver [25, Capítulo 1]):

$$d_{\mathbb{D}}(p, q) = \log \left(\frac{1 + \left| \frac{p-q}{1-\bar{p}q} \right|}{1 - \left| \frac{p-q}{1-\bar{p}q} \right|} \right) \quad (1.4)$$

La fórmula anterior permite demostrar que la topología inducida en \mathbb{D} por la métrica hiperbólica coincide con la topología euclídea. Por otra parte, y a diferencia de lo que ocurre con la métrica euclídea, el disco unidad es un espacio métrico completo cuando se le dota de la métrica de Poincaré.

Obviamente, si se trata de calcular la distancia entre el origen y un punto $z \in \mathbb{D}$ cualquiera, aplicando la fórmula (1.4) se tiene la siguiente expresión sencilla:

$$d_{\mathbb{D}}(0, z) = \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|} = 2 \operatorname{arctanh} |z|, \quad (1.5)$$

y la geodésica en \mathbb{D} que une 0 y z es, precisamente, el segmento recto (todos los diámetros en \mathbb{D} son geodésicas).

A partir de esta información y del hecho de que las transformaciones de Möbius (que recordemos que son las isometrías en la métrica de Poincaré) llevan segmentos rectos en segmentos rectos o en circunferencias, puede deducirse que las geodésicas en \mathbb{D} son los diámetros y los arcos de circunferencia perpendiculares a $\partial\mathbb{D}$.

Dados $p, q \in \mathbb{D}$, la curva de menor longitud hiperbólica que une ambos puntos (es decir, la geodésica), viene determinada por la expresión:

$$[p, q]_{\mathbb{D}} = \frac{t \frac{q}{|q|} \frac{p-q}{1-p\bar{q}} + q}{1 + t|q| \frac{p-q}{1-p\bar{q}}}, \text{ con } 0 \leq t \leq |q|$$

Si dotamos al semiplano superior $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ de la métrica conforme:

$$ds = \frac{|dz|}{y}$$

se obtiene un modelo isométricamente equivalente al del disco unidad con la métrica de Poincaré. Por esta razón utilizaremos \mathbb{D} y \mathbb{U} indistintamente.

En este modelo, la fórmula que permite calcular la distancia entre dos puntos arbitrarios de \mathbb{U} viene dada por la expresión:

$$\sinh^2 \frac{d_{\mathbb{U}}(z, w)}{2} = \frac{|z - w|^2}{4\Im z \Im w} \quad (1.6)$$

1.3. Superficies de Riemann

1.3.1. Nociones generales

A la hora de introducir el concepto de superficie de Riemann, vamos a optar por utilizar la teoría de aplicaciones conformes. De esta manera, puesto que este tipo de aplicaciones preserva ángulos y orientaciones, se destaca especialmente la geometría del problema.

Definición 1.17. Sea \mathcal{S} un espacio topológico Hausdorff conexo y (V_{α}, h_{α}) una familia de cartas locales con las siguientes propiedades:

1. Los conjuntos V_{α} son un cubrimiento abierto de \mathcal{S} .
2. Cada h_{α} es un homeomorfismo de V_{α} en un subconjunto abierto del plano complejo \mathbb{C} .
3. Si $V_{\alpha} \cap V_{\beta} \neq \emptyset$, entonces el cambio de carta $h_{\alpha\beta} := h_{\beta} \circ h_{\alpha}^{-1}$ es una aplicación conforme en $h_{\alpha}(V_{\alpha} \cap V_{\beta})$.

Se dice que una familia de cartas locales que cumpla estas condiciones es una base para una estructura conforme en \mathcal{S} . (Para una definición rigurosa de estructura conforme, consultar [2]).

Definición 1.18. Una superficie de Riemann es un par ordenado (\mathcal{S}, Ψ) , donde \mathcal{S} es un espacio topológico Hausdorff conexo y Ψ una familia de homeomorfismos locales en \mathcal{S} que definen una estructura conforme en \mathcal{S} .

La definición anterior suele abreviarse diciendo que una superficie de Riemann es una variedad bidimensional diferenciable en la que los cambios de carta son aplicaciones conformes (o funciones holomorfas).

En adelante, para referirnos a una superficie de Riemann utilizaremos la notación \mathcal{S} en lugar de (\mathcal{S}, Ψ) . Puesto que todas las aplicaciones de la forma $h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$ conservan la orientación, está claro que \mathcal{S} es una superficie orientable.

En el caso de que las aplicaciones h_α estuvieran definidas en un abierto en la topología relativa del semiplano superior cerrado, en lugar de en un abierto de \mathbb{C} , diríamos que la superficie de Riemann *tiene borde*. Una superficie sin borde se dice que es *abierta*. Mientras que no especifiquemos explícitamente que la superficie es abierta, admitiremos tanto que tenga borde como que no lo tenga.

Ejemplo 1.19.

1. Los abiertos del plano constituyen uno de los ejemplos más importantes de superficies de Riemann.
2. La esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ aparece de forma natural al tomar la transformación de Möbius:

$$T : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a/c\}, \text{ dada por } T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ y } ad - bc \neq 0,$$

y extenderla a $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$.

Teorema de Cubrimiento Universal. *Dado un espacio topológico conexo X tal que todo punto tiene un entorno simplemente conexo, existe otro espacio \tilde{X} simplemente conexo, al que llamaremos recubridor universal de X , y una aplicación continua y abierta $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$, a la que denominaremos aplicación recubridora universal, que es localmente un homeomorfismo.*

Además, si X es una variedad \mathcal{C}^k , entonces \tilde{X} es una variedad \mathcal{C}^k y $\pi \in \mathcal{C}^k(\tilde{X}, X)$. Y si X es una variedad analítica, entonces \tilde{X} y π son variedad y aplicación analíticas, respectivamente.

Definimos el grupo de cubrimiento o de transformaciones recubridoras Γ de X (asociado a π) como:

$$\Gamma = \{\gamma : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \text{ tal que } \gamma \text{ es un homeomorfismo con } \pi \circ \gamma = \pi\}$$

(Es decir, p y $\gamma(p)$ tienen la misma proyección). Entonces, se verifica que X es homeomorfo a \tilde{X}/Γ . Además, Γ es isomorfo al grupo fundamental $\Pi_1(X, p)$ para todo punto p de X . Por otra

parte, Γ es único salvo conjugación, y es un grupo discreto sin puntos fijos, con excepción de la identidad.

Ejemplo 1.20. El recubridor universal del plano punteado, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, es el plano complejo \mathbb{C} , y su aplicación recubridora: $\pi(z) = e^{2\pi iz}$.

Teorema de la aplicación de Riemann. Todo abierto simplemente conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es conformemente equivalente a \mathbb{D} (y por tanto a \mathbb{U}).

Este teorema tiene importantes consecuencias sobre los espacios recubridores:

Teorema de uniformización. (Ver [1, p. 142]). Si S es una superficie de Riemann, entonces su recubridor universal \tilde{S} es conformemente equivalente a $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, \mathbb{C} , o \mathbb{D} . Además:

1. Si $\tilde{S} = \hat{\mathbb{C}}$, entonces $S = \hat{\mathbb{C}}$. Efectivamente: como ya hemos mencionado antes, el grupo de cubrimiento Γ es discreto y no tiene puntos fijos. Dado que además es un subgrupo del grupo de transformaciones de Möbius, y todas estas transformaciones tienen un punto fijo en $\hat{\mathbb{C}}$, necesariamente Γ debe tener como único elemento la identidad, y por esta razón la esfera de Riemann sólo puede recubrirse a sí misma. En este caso, la curvatura es constante e igual a 1 con la “métrica esférica” $ds = \frac{2|dz|}{1+|z|^2}$.
2. Si $\tilde{S} = \mathbb{C}$, entonces S debe ser necesariamente \mathbb{C} , $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ o un toro. Efectivamente: el grupo de cubrimiento debe estar formado, necesariamente, por transformaciones del tipo $T(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$. Por otra parte, para que el grupo sea discreto, Γ o bien debe contener como único elemento la identidad (en cuyo caso S es conformemente equivalente a \mathbb{C}) o bien debe tener uno o dos generadores (y en este caso, S es conformemente equivalente a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ o a un toro). Nótese que hay toda una variedad unidimensional de toros no conformemente equivalentes entre sí.

En este caso, la curvatura de la proyección de la métrica euclídea sobre estas superficies es constantemente igual a cero.

Las superficies descritas en estos dos apartados se denominan *excepcionales*.

3. Todas las demás superficies tienen como recubridor universal el disco unidad \mathbb{D} y reciben el nombre de *no excepcionales*.

Utilizando la aplicación recubridora $\pi : \mathbb{D} \rightarrow S$, se puede proyectar la métrica de Poincaré del disco unidad sobre cualquier superficie no excepcional S , puesto que el grupo de cubrimiento es un subgrupo del grupo de isometrías de \mathbb{D} . Dotada de esta métrica riemanniana conforme,

la superficie tiene curvatura constante -1 y es un espacio métrico completo y geodésico, puesto que entre dos puntos distintos cualesquiera siempre existe (al menos) una geodésica uniéndolos.

Mientras que no se diga explícitamente lo contrario, consideraremos a toda superficie de Riemann no excepcional con su métrica de Poincaré.

Observación 1.21. *Como ya hemos mencionado anteriormente, nosotros nos centraremos en el estudio de la hiperbolicidad de superficies de Riemann no excepcionales. Querría destacar, a la vista de los resultados expuestos, que esto no supone en absoluto una gran restricción:*

Por una parte, cualquier variedad riemanniana bidimensional orientable sin borde admite estructura de superficie de Riemann abierta. (Como ya habíamos visto anteriormente, toda superficie de Riemann es orientable. Utilizando las coordenadas isotermas, se puede probar, recíprocamente, que toda superficie orientable admite estructura de superficie de Riemann).

Por otra, las únicas superficies de Riemann que quedan fuera de nuestro estudio son las excepcionales. Sin embargo es fácil determinar la hiperbolicidad en estos cuatro casos particulares: la esfera y el toro son hiperbólicos por ser compactos, el plano punteado $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (con su métrica $ds = |dz|/|z|$ conforme, completa y con curvatura constante 0) también lo es por ser isométrico a un cilindro (y, por tanto, quasi-isométrico a \mathbb{R}), y el plano no es hiperbólico (como vimos en el Ejemplo 1.9.(1), \mathbb{R}^n es hiperbólico si y sólo si $n = 1$).

1.3.2. Obstáculos topológicos

Como demostraremos más adelante en la sección 3.3, los obstáculos topológicos que vamos a ver a continuación jugarán un papel muy importante en la hiperbolicidad de las superficies de Riemann.

A continuación, una definición previa:

Definición 1.22. *Decimos que S es una superficie de Riemann no excepcional con borde si S se puede obtener a partir de otra superficie de Riemann abierta no excepcional R eliminando un conjunto abierto V , de forma que:*

1. S es conexa y $d_S = d_R|_S$ (ver Definición 1.16).
2. Toda bola en R interseca, a lo sumo, una cantidad finita de componentes conexas de V .
3. El borde de S es localmente Lipschitz.

Definición 1.23. Una puntura en una superficie de Riemann abierta no excepcional es una región isométrica al subconjunto $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < e^{-2\pi}\}$ de la superficie $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ dotada con la métrica

$$ds := \frac{|dz|}{|z| \log \frac{1}{|z|}}$$

(ver [6]).

Desde el punto de vista geométrico, una puntura es un final doblemente conexo en el es posible encontrar curvas homotópicamente no triviales de longitud arbitrariamente pequeña. En el caso particular de que la superficie de Riemann sea un dominio plano, una puntura es un entorno de un punto aislado en la frontera de la superficie. Podemos pensar en las punturas como en entornos de geodésicas cerradas de longitud cero.

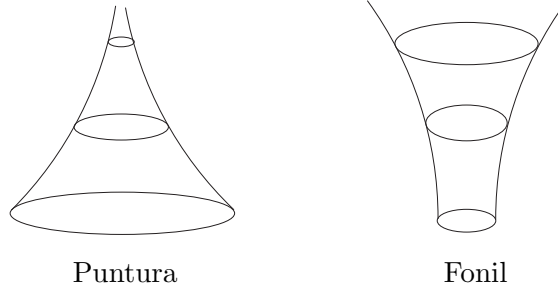
Definición 1.24. Un fonil es una superficie de Riemann no excepcional con borde, que es topológicamente un cilindro semi-infinito y cuyo borde es una geodésica simple cerrada. Dado un número positivo a , existe un único fonil, salvo transformaciones conformes, cuyo borde tiene longitud a . Todo fonil es conformemente equivalente, para algún $\beta > 1$, al subconjunto $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < \beta\}$ del anillo $\{z \in \mathbb{C} : 1/\beta \leq |z| < \beta\}$.

Todo final doblemente conexo de una superficie de Riemann abierta no excepcional es, o bien una puntura (si hay curvas homotópicamente no triviales de longitud arbitrariamente pequeña), o bien un fonil (en caso contrario).

Aunque tanto punturas como foniles son homeomorfos a cilindros (y, por tanto, topológicamente equivalentes entre sí), sus métricas son, sin embargo, muy diferentes. De hecho, una puntura tiene área finita y un fonil área infinita.

Una puntura es isométrica a una pseudoesfera dotada con la restricción de la métrica euclídea de \mathbb{R}^3 . De hecho, es una de las pocas regiones de una superficie de Riemann no excepcional que podemos ver en \mathbb{R}^3 (recordemos que el teorema de Hilbert asegura que ninguna superficie completa con curvatura constante -1 admite una inmersión isométrica en \mathbb{R}^3). Aunque los

foniles no *caben* en \mathbb{R}^3 se suelen representar como en el dibujo:



Definición 1.25. *Por último, un género es el tipo de obstáculo topológico que encontramos, por ejemplo, en un toro.*

1.3.3. Otros conceptos interesantes

A continuación definimos el concepto de *collar*, que jugará un papel importante en las demostraciones de la sección 3.3. Se puede hablar de collares *alrededor de punturas* y también *alrededor de geodésicas simples cerradas*.

Definición 1.26. *Sea S una superficie de Riemann abierta no excepcional. Un collar alrededor de una puntura en S es un dominio doblemente conexo delimitado por la propia puntura y por una curva de Jordan (llamada curva frontera del collar) ortogonal al haz de geodésicas que emanan de la puntura.*

Un collar alrededor de una puntura q en una superficie S de área α se denomina α -collar y se denota por $C_S(q, \alpha)$.

El bien conocido *Lema del collar* de Shimizu (ver [37] y [9, Capítulo 4.4]) demuestra que cualquier puntura en cualquier superficie de Riemann no excepcional abierta, tiene un α -collar para todo $0 < \alpha \leq 2$.

Decimos que una curva es *homótopa a una puntura q* si es libremente homótopa a $\partial C_S(q, \alpha)$ para todo $0 < \alpha \leq 2$.

Definición 1.27. *Un collar alrededor de una geodésica simple cerrada γ en una superficie de Riemann abierta no excepcional S es un dominio doblemente conexo “delimitado” por dos curvas de Jordan (llamadas curvas frontera del collar) que es ortogonal al haz de geodésicas que emanan*

de γ . Es decir, el collar es el conjunto $\{p \in S : d_S(p, \gamma) < d\}$, para alguna constante positiva d . A esta constante d se la denomina ancho del collar.

El *Lema del Collar* (ver [31]) asegura que alrededor de cualquier geodésica γ existe un collar de anchura d , para todo $0 < d \leq d_0$, donde $\cosh d_0 = \coth(L_S(\gamma)/2)$, o similarmente, $\sinh d_0 = \operatorname{cosech}(L_S(\gamma)/2)$. Se trata de un resultado muy importante, ya que proporciona constantes universales independientes tanto de la superficie S considerada, como de la geodésica γ .

La clausura del α -collar de una puntura (con $0 < \alpha < 2$) o del collar de una geodésica simple cerrada de ancho $0 < d < d_0$, es una superficie de Riemann no excepcional con borde.

Por último, destacar que dos collares correspondientes a punturas distintas, geodésicas disjuntas, o a una puntura y una geodésica, son siempre disjuntos entre sí (si consideramos 2-collares para punturas y collares de ancho d_0 para geodésicas).

Definición 1.28. *Consideremos una superficie de Riemann no excepcional S de tipo finito (con o sin borde); si S tiene borde, pedimos también que las componentes de ∂S de longitud infinita sean geodésicas locales.*

Un outer loop en S es una geodésica simple cerrada que, o bien es la curva frontera de un fonil, o bien es libremente homótopa a alguna componente de ∂S .

Un fonil generalizado en S es una superficie de Riemann doblemente conexa isométrica a un subconjunto de un anillo, cuyo borde es una curva simple cerrada.

Un outer loop generalizado en S es una geodésica simple cerrada en S que, o bien es la curva frontera de un fonil generalizado, o bien es libremente homótopa a alguna componente de ∂S .

La característica de S es $a = 2g - 2 + n$, donde g es el género de S y n es la suma del número de punturas y de outer loops generalizados de S .

Observemos que si S no tiene frontera, entonces todo outer loop generalizado en S es un outer loop.

Observación 1.29. *Si γ es una curva cerrada en una superficie de Riemann no excepcional abierta S , no libremente homótopa ni a un punto, ni a la frontera de un collar de una puntura, es bien conocido que existe una única geodésica simple cerrada en la clase de homotopía libre de γ en S .*

Definición 1.30. Denotamos por $\mathcal{S}(a, l)$ el conjunto de superficies de Riemann no excepcionales S de tipo finito que verifican las siguientes propiedades: si S tiene borde, entonces las componentes de ∂S de longitud infinita son geodésicas locales, S tiene característica menor o igual que a y no tiene género, y todo outer loop generalizado tiene longitud menor o igual que l . Denotamos por $\mathcal{S}_G(a, l)$ el conjunto de superficies de Riemann $S \in \mathcal{S}(a, l)$ que verifican la siguiente propiedad adicional: si S tiene borde, entonces ∂S es la unión de geodésicas locales (cerradas o no cerradas).

1.4. Estructura de la tesis

La presente memoria está estructurada en tres capítulos. El primero de ellos es la Introducción, el segundo expone los resultados del artículo “Gromov hyperbolicity through decomposition of metric spaces II” (ver [28]), y el tercero contiene los resultados de los artículos “The topology of balls and Gromov hyperbolicity of Riemann surfaces” (ver [29]) y “The role of funnels and punctures in the Gromov hyperbolicity of Riemann surfaces” (ver [30]).

Otros artículos que tratan temas relacionados son [34], [35] y [36], y constituyen el núcleo fundamental de la tesis de Eva Tourís.

1.5. Notación

Denotaremos por X o por X_n espacios métricos geodésicos. Por d_X , L_X y B_X nos referiremos, respectivamente, a la distancia, longitud y bolas en la métrica de X .

Tanto S como S_i nos servirán habitualmente para denotar superficies de Riemann no excepcionales. A menos que se especifique lo contrario, asumiremos que la métrica definida en tales superficies es la de Poincaré.

Por $\sharp A$ haremos referencia al cardinal del conjunto A . Finalmente, utilizaremos k_i, c_i para referirnos a constantes positivas que pueden asumir valores distintos en cada teorema.

Capítulo 2

Hiperbolicidad mediante la descomposición de espacios métricos

2.1. Introducción

Este capítulo profundiza en el objetivo enunciado en la Introducción de esta memoria acerca de cómo obtener resultados globales sobre hiperbolicidad a partir de información local. Precisamente esta idea de fondo nos llevó a pensar en un espacio X como en la unión de subespacios o “componentes” $\{X_n\}_{n \in \Lambda}$.

El Teorema 2.3 afirma que si estos subespacios se unen entre sí siguiendo el diseño combinatorio de un árbol (es decir, evitando la creación de obstáculos topológicos adicionales), entonces la hiperbolicidad uniforme de los componentes individuales X_n garantiza la hiperbolicidad del espacio X .

Sin embargo, si los subespacios se unen siguiendo un modelo de grafo arbitrario (es decir, eliminando la hipótesis sobre conexiones topológicas sencillas), la hiperbolicidad uniforme de los componentes X_n no garantiza la hiperbolicidad del espacio total X . En cambio, un resultado un tanto sorprendente asegura que si Y es un grafo que modeliza adecuadamente las conexiones entre subespacios X_n uniformemente hiperbólicos, la hiperbolicidad de Y sí nos permite garantizar la hiperbolicidad de X . (Este hecho es trivial en el caso de que Y sea un árbol).

El grafo Y debe verificar ciertos requisitos métricos para ser un modelo válido para las conexiones entre componentes X_n . Sin embargo, no es necesario en absoluto que Y modele a los propios subespacios (que podrían, eventualmente, extenderse arbitrariamente lejos de las

conexiones). Utilizando estos hechos, el Teorema 2.14 generaliza el resultado anterior porque no requiere que el espacio Y utilizado para modelizar las conexiones entre componentes sea un grafo.

En la última sección nos ocupamos de aplicar a superficies de Riemann los resultados anteriores y obtenemos consecuencias interesantes.

Observemos que las constantes que aparecen en todos los teoremas, tanto de este capítulo como del siguiente, dependen sólo de un pequeño número de parámetros, como ocurre habitualmente en la teoría de espacios hiperbólicos.

2.2. Resultados

Más adelante veremos cómo el Teorema 2.3 permite estudiar la hiperbolicidad de un cierto espacio X en función de la de sus subespacios componentes X_n determinados por la siguiente definición:

Definición 2.1. *Decimos que un espacio métrico geodésico X admite una descomposición, si existe una familia de espacios métricos geodésicos cerrados $\{X_n\}_{n \in \Lambda}$ con $X = \cup_{n \in \Lambda} X_n$ y $X_n \cap X_m = \cup_{i \in I_{nm}} \eta_{nm}^i$, donde para cada $n \in \Lambda$, $\{\eta_{nm}^i\}_{m,i}$ son subconjuntos cerrados de X_n disjuntos dos a dos (se admite la posibilidad $\eta_{nm}^i = \emptyset$). Además, todo segmento geodésico de X interseca, a lo sumo, un número finito de η_{nm}^i 's.*

Decimos que X_n , con $n \in \Lambda$, es una (k_1, k_2, k_3) -pieza de árbol o arbórea si satisface las siguientes propiedades:

- (a) $\#I_{nm} \leq 1$ (y, por tanto, podemos escribir $\eta_{nm}^i = \eta_{nm}$); si $\#I_{nm} = 1$, entonces $X \setminus \eta_{nm}$ no es conexo y a, b están en diferentes componentes conexas de $X \setminus \eta_{nm}$ para todo $a \in X_n \setminus \eta_{nm}$, $b \in X_m \setminus \eta_{nm}$.
- (b) $\text{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \leq k_1$ para todo $m \neq n$, y existe $A_n \subseteq \Lambda$, tal que $\text{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \leq k_2 d_{X_n}(\eta_{nm}, \eta_{nk})$ si $m \neq k$ y $m, k \in A_n$, y $\sum_{m \notin A_n} \text{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \leq k_3$.

Decimos que un espacio métrico geodésico X tiene una descomposición en árbol o arbórea si admite una descomposición $\{X_n\}_{n \in \Lambda}$ y existen constantes positivas k_1, k_2, k_3 , tales que todo X_n , con $n \in \Lambda$, es una (k_1, k_2, k_3) -pieza de árbol.

Es interesante observar que la condición $\text{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \leq k_1$ realmente no es muy restrictiva: si el espacio es “ancho” en todo punto (en el sentido de radio de inyectividad grande, como

ocurre en los espacios simplemente conexos) o “estrecho” en todo punto (como en el caso de los árboles), el estudio de la hiperbolicidad es más fácil. Sin embargo, si es posible encontrar tanto partes estrechas (en nuestro caso, los η_{nm} ’s), como partes anchas, el problema resulta ser más complicado, pero también más interesante.

Observación 2.2.

1. Obviamente, la condición (b) sólo es necesaria para $\eta_{nm}, \eta_{nk} \neq \emptyset$.
2. No es necesario que los conjuntos Λ y A_n sean numerables.
3. La hipótesis $\text{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \leq k_2 d_{X_n}(\eta_{nm}, \eta_{nk})$ se verifica si se tiene $d_{X_n}(\eta_{nm}, \eta_{nk}) \geq k'_2$, ya que $\text{diam}_{X_n}(\eta_{nm}) \leq k_1$.
4. La condición (a) para todo $n \in \Lambda$ garantiza que el grafo $R = (V, E)$ construido de la forma siguiente es un árbol: $V = \cup_{n \in \Lambda} \{v_n\}$ y $[v_n, v_m] \in E$ si y sólo si $\eta_{nm} \neq \emptyset$.
5. Si X es una superficie de Riemann, $\{X_n\}_{n \in \Lambda}$ son superficies de Riemann con borde, y $\eta_{nm} \subset \partial X_n \cap \partial X_m$, entonces la condición “ a, b están en diferentes componentes conexas de $X \setminus \eta_{nm}$ para todo $a \in X_n \setminus \eta_{nm}, b \in X_m \setminus \eta_{nm}$ ” en (a), es una consecuencia de “ $X \setminus \eta_{nm}$ no es conexo”.

El siguiente resultado mejora el Teorema 2.4 de [34], y además utiliza una línea de argumentación completamente diferente; de hecho, la prueba proporciona una expresión explícita de las constantes involucradas. Será utilizado más adelante para probar el Teorema 2.14, y puede aplicarse para estudiar la hiperbolicidad de las superficies de Riemann (ver [29, Propositiones 3.1 y 3.2]).

Teorema 2.3. *Consideremos un espacio métrico geodésico X con una descomposición arbórea $\{X_n\}_{n \in \Lambda}$. Entonces, X es δ -hiperbólico si y sólo si existe una constante k_4 tal que X_n es k_4 -hiperbólico para todo $n \in \Lambda$.*

Además, si X_n es k_4 -hiperbólico, podemos tomar

$$\delta = 4(2k_1 + 4k_4 + 2H(k_4, 2 \max\{1, k_2\}, 4k_1 + 2k_3)),$$

donde H es la constante del Teorema 1.15; si X es δ -hiperbólico, podemos tomar

$$k_4 = 16 \max\{1, k_2\} (2\delta + k_1 + k_3 + H(\delta, 2 \max\{1, k_2\}, 2k_1 + 2k_3)).$$

(Se puede consultar la demostración de este teorema en la página 28).

Observemos que no es necesario que los conjuntos η_{nm} sean conexos, y, por tanto, es posible crear un número finito de “asas” cada vez que se pegan dos piezas.

Ninguna de las dos implicaciones del Teorema 2.3 es cierta sin la hipótesis (b) de la Definición 2.1, como prueban los siguientes ejemplos:

El conjunto $Q = \{z = x + iy : x \geq 0, y \geq 0\}$ con la distancia euclídea, no es hiperbólico, pero Q es la unión de 1-thin piezas $X_n = \{z \in Q : n - 1 \leq |z| \leq n\}$.

Consideremos cualquier fonil F con frontera γ . Los resultados de [34] permiten afirmar que F es hiperbólico. Sin embargo, es la unión de las piezas no uniformemente hiperbólicas $X_n = \{z \in F : n - 1 \leq d(z, \gamma) \leq n\}$ (la constante de hiperbolicidad de X_n es comparable con $L(\partial X_n)$).

La prueba del Teorema 2.3 permite obtener los siguientes resultados:

Corolario 2.4. *Consideremos un espacio métrico geodésico X con una descomposición $\{X_n\}_{n \in \Lambda}$. Asumamos que, para un cierto $n_0 \in \Lambda$, X_{n_0} es una (k_1, k_2, k_3) -pieza de árbol que es k_4 -hiperbólica. Si T es un triángulo geodésico en X y X_{n_0} interseca al menos dos lados de T , entonces $X_{n_0} \cap T$ es δ^* -thin, con $\delta^* := 3k_1/2 + 4k_4 + 2H(k_4, 2 \max\{1, k_2\}, 4k_1 + 2k_3)$.*

Corolario 2.5. *Sea X un espacio métrico geodésico δ -hiperbólico, con una descomposición $\{X_n\}_{n \in \Lambda}$. Asumamos que, para un cierto $n_0 \in \Lambda$, X_{n_0} es una (k_1, k_2, k_3) -pieza de árbol. Entonces X_{n_0} es δ_0 -thin, con*

$$\delta_0 := 4 \max\{1, k_2\} (2\delta + k_1 + k_3 + H(\delta, 2 \max\{1, k_2\}, 2k_1 + 2k_3)).$$

Para probar el Teorema 2.3 necesitaremos algunos resultados técnicos previos:

Lema 2.6. *Consideremos un espacio métrico geodésico X y una geodésica $\eta = [x_0, x_{2n+1}] = \cup_{j=1}^{2n+1} [x_{j-1}, x_j]$. Para cada $1 \leq j \leq n$, consideramos una curva continua η'_j uniendo x_{2j-1} y x_{2j} , tal que $L(\eta'_j) \leq a$ para todo $1 \leq j \leq n$ y $L(\eta'_j) \leq bL([x_{2j}, x_{2j+1}])$ para todo $1 \leq j \leq n - 1$. Si llamamos η' a la curva que se obtiene a partir de η reemplazando $[x_{2j-1}, x_{2j}]$ por η'_j , entonces η' , con su parametrización de longitud de arco, es una $(2 \max\{1, b\}, 2a)$ -quasigeodésica continua.*

Demostración. Consideremos las parametrizaciones de longitud de arco $\eta : [0, l] \rightarrow X$ y $\eta' : [0, l'] \rightarrow X$. Podemos escribir los intervalos $[0, l] = \cup_{j=1}^{2n+1} [t_{j-1}, t_j]$ y $[0, l'] = \cup_{j=1}^{2n+1} [l_{j-1}, l_j]$,

tales que $\eta'(l_j) = \eta(t_j) = x_j$ para todo $0 \leq j \leq 2n+1$, $\eta'([l_{2j}, l_{2j+1}]) = [x_{2j}, x_{2j+1}]$ para todo $0 \leq j \leq n$ y $\eta'([l_{2j-1}, l_{2j}]) = \eta'_j$ para todo $1 \leq j \leq n$. Por hipótesis, sabemos que $l_{2j} - l_{2j-1} \leq a$ para todo $1 \leq j \leq n$ y $l_{2j} - l_{2j-1} \leq b(l_{2j+1} - l_{2j})$ para todo $1 \leq j \leq n-1$.

Ya que estamos considerando η' con su parametrización de longitud de arco, entonces, para todos $s, t \in [0, l']$, se tiene que $d(\eta'(t), \eta'(s)) \leq L(\eta'([s, t])) = |t - s|$.

Si $s, t \in [l_{2j}, l_{2j+1}]$, entonces $d(\eta'(t), \eta'(s)) = |t - s|$ para todo $0 \leq j \leq n$.

Si $s \in [l_{2i}, l_{2i+1}]$ y $t \in [l_{2j}, l_{2j+1}]$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $i < j$; entonces existen $s' \in [t_{2i}, t_{2i+1}]$ y $t' \in [t_{2j}, t_{2j+1}]$ tales que

$$\begin{aligned} d(\eta'(t), \eta'(s)) &= d(\eta(t'), \eta(s')) \geq t_{2i+1} - s' + \sum_{k=i+1}^{j-1} (t_{2k+1} - t_{2k}) + t' - t_{2j} \\ &= l_{2i+1} - s + \frac{1}{2} \sum_{k=i+1}^{j-1} (l_{2k+1} - l_{2k} + l_{2k+1} - l_{2k}) + t - l_{2j} \\ &\geq \frac{1}{2} \left(l_{2i+1} - s + b^{-1} \sum_{k=i+1}^{j-1} (l_{2k} - l_{2k-1}) + \sum_{k=i+1}^{j-1} (l_{2k+1} - l_{2k}) \right. \\ &\quad \left. + l_{2j} - l_{2j-1} - a + t - l_{2j} \right) \geq \frac{1}{2} \min\{1, b^{-1}\} (t - s) - \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

En el caso general, si $s, t \in [0, l']$ existen $s^* \in [l_{2i}, l_{2i+1}]$ y $t^* \in [l_{2j}, l_{2j+1}]$, con $|s - s^*| \leq a/2$ y $|t - t^*| \leq a/2$. Por tanto

$$\begin{aligned} d(\eta'(t), \eta'(s)) &\geq d(\eta'(t^*), \eta'(s^*)) - a \geq \frac{1}{2} \min\{1, b^{-1}\} |t^* - s^*| - \frac{3a}{2} \\ &\geq \frac{1}{2} \min\{1, b^{-1}\} |t - s| - 2a. \end{aligned}$$

□

Lema 2.7. *Consideremos un espacio métrico geodésico X y una (a, b) -quasigeodésica continua con su parametrización de longitud de arco $\eta : [0, l] \rightarrow X$, tal que $[0, l] = \cup_{j=1}^{2n+1} [t_{j-1}, t_j]$. Para cada $1 \leq j \leq n$, consideramos una curva continua η'_j uniendo $\eta(t_{2j-1})$ y $\eta(t_{2j})$ tal que $\sum_{j=1}^n L(\eta'_j) \leq c$. Si η' es la curva que se obtiene a partir de η sustituyendo $\eta([t_{2j-1}, t_{2j}])$ por η'_j , entonces η' es una $(a, b + (1 + 3a^{-1})c/2)$ -quasigeodésica continua con su parametrización de longitud de arco.*

Demostración. Consideremos la parametrización de longitud de arco $\eta' : [0, l'] \rightarrow X$. Puede escribirse $[0, l'] = \cup_{j=1}^{2n+1} [l_{j-1}, l_j]$, tal que $\eta'(l_j) = \eta(t_j)$ para todo $0 \leq j \leq 2n+1$, $\eta'([l_{2j}, l_{2j+1}]) =$

$\eta([t_{2j}, t_{2j+1}])$ para todo $0 \leq j \leq n$ y $\eta'([l_{2j-1}, l_{2j}]) = \eta'_j$ para todo $1 \leq j \leq n$. Se tiene que $\sum_{j=1}^n (l_{2j} - l_{2j-1}) \leq c$.

Puesto que estamos considerando η' con su parametrización de longitud de arco, entonces, para todos $s, t \in [0, l']$, se tiene que $d(\eta'(t), \eta'(s)) \leq L(\eta'([s, t])) = |t - s|$. Para probar la otra desigualdad se tiene que:

Si $s, t \in [l_{2j}, l_{2j+1}]$, entonces $d(\eta'(t), \eta'(s)) \geq a^{-1}|t - s| - b$ para todo $0 \leq j \leq n$.

Si $s \in [l_{2i}, l_{2i+1}]$ y $t \in [l_{2j}, l_{2j+1}]$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $i < j$; entonces existen $s' \in [t_{2i}, t_{2i+1}]$ y $t' \in [t_{2j}, t_{2j+1}]$ tales que

$$\begin{aligned} d(\eta'(t), \eta'(s)) &= d(\eta(t'), \eta(s')) \geq a^{-1}|t' - s'| - b \\ &= a^{-1}\left(t' - t_{2j} + \sum_{k=2i+1}^{2j-1} (t_{k+1} - t_k) + t_{2i+1} - s'\right) - b \\ &\geq a^{-1}\left(t - l_{2j} + \sum_{k=2i+1}^{2j-1} (l_{k+1} - l_k) + l_{2i+1} - s\right) - (b + a^{-1}c) \\ &= a^{-1}(t - s) - (b + a^{-1}c). \end{aligned}$$

En el caso general, si $s, t \in [0, l']$, existen $s^* \in [l_{2i}, l_{2i+1}]$ y $t^* \in [l_{2j}, l_{2j+1}]$, con $|s - s^*| + |t - t^*| \leq c/2$. Por tanto

$$\begin{aligned} d(\eta'(t), \eta'(s)) &\geq d(\eta'(t^*), \eta'(s^*)) - c/2 \geq a^{-1}|t^* - s^*| - (b + a^{-1}c + c/2) \\ &\geq a^{-1}|t - s| - (b + 3a^{-1}c/2 + c/2). \end{aligned}$$

□

Lema 2.8. Consideremos una (a, b) -quasigeodésica $q_1 : [\alpha, \beta] \longrightarrow X$ y dos curvas continuas parametrizadas según su longitud de arco $q_0 : [\alpha - d_1, \alpha] \longrightarrow X$, $q_2 : [\beta, \beta + d_2] \longrightarrow X$, verificando $q_0(\alpha) = q_1(\alpha)$ y $q_2(\beta) = q_1(\beta)$. Entonces la curva $q := q_0 \cup q_1 \cup q_2$ es una $(a, b + (1 + a^{-1})(d_1 + d_2))$ -quasigeodésica.

Demostración. Vamos a tratar el caso $s \in [\alpha - d_1, \alpha]$ y $t \in [\beta, \beta + d_2]$, puesto que los otros son

más sencillos.

$$\begin{aligned}
d(q(t), q(s)) &\leq d(q(t), q_1(\beta)) + d(q_1(\beta), q_1(\alpha)) + d(q_1(\alpha), q(s)) \\
&\leq d_2 + a(\beta - \alpha) + b + d_1 \leq a(t - s) + b + d_1 + d_2, \\
d(q(t), q(s)) &\geq d(q_1(\beta), q_1(\alpha)) - d(q(t), q_1(\beta)) - d(q_1(\alpha), q(s)) \\
&\geq a^{-1}(\beta - \alpha) - b - d_1 - d_2 \\
&\geq a^{-1}(t - s) - a^{-1}(d_1 + d_2) - b - d_1 - d_2.
\end{aligned}$$

□

Definición 2.9. Consideremos los tres siguientes segmentos quasigeodésicos en un espacio métrico : J_1 uniendo x_1 y x'_2 , J_2 uniendo x_2 y x'_3 , J_3 uniendo x_3 y x'_1 . Se dice que $T = \{J_1, J_2, J_3\}$ es un (a, b, c) -triángulo quasigeodésico si J_1, J_2, J_3 son (a, b) -quasigeodésicas y $d(x_i, x'_i) \leq c$ para $1 \leq i \leq 3$.

Lema 2.10. Para cada $\delta, b, c \geq 0$ y $a \geq 1$, existe una constante $K = K(\delta, a, b, c)$ con la siguiente propiedad:

Si X es un espacio métrico geodésico δ -hiperbólico y $T \subseteq X$ es un triángulo (a, b, c) -quasigeodésico, entonces T es K -thin. Además, $K = 4\delta + c + 2H(\delta, a, b + 2c)$, donde H es la constante del Teorema 1.15.

Demostración. Consideramos los tres siguientes segmentos geodésicos $[x'_2, x_2]$, $[x'_3, x_3]$ y $[x'_1, x_1]$. Por el Lema 2.8 (tomando $d_1 = 0$ y $d_2 \leq c$), las curvas $s(x_1, x_2) := J_1 \cup [x'_2, x_2]$, $s(x_2, x_3) := J_2 \cup [x'_3, x_3]$ y $s(x_3, x_1) := J_3 \cup [x'_1, x_1]$ son $(a, b + 2c)$ -quasigeodésicas. Por el Teorema 1.15, existen geodésicas $\{[x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_1]\}$ con $\mathcal{H}(s(x_i, x_j), [x_i, x_j]) \leq H$, para alguna constante $H = H(\delta, a, b + 2c)$.

Probemos ahora que el triángulo $(a, b + 2c, 0)$ -quasigeodésico $T' = \{J_1, J_2, J_3\}$ es $(4\delta + 2H)$ -thin. Consideremos cualquier permutación $\{x_i, x_j, x_k\}$ de $\{x_1, x_2, x_3\}$ y $x \in s(x_i, x_j)$; entonces existe $x' \in [x_i, x_j]$ con $d(x, x') \leq H$.

Puesto que las geodésicas $\{[x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_1]\}$ forman un triángulo geodésico 4δ -thin, existe $y' \in [x_j, x_k] \cup [x_k, x_i]$ con $d(x', y') \leq 4\delta$. Ahora podemos elegir $y \in s(x_j, x_k) \cup s(x_k, x_i)$ con $d(y, y') \leq H$. Por tanto, T' es $(4\delta + 2H)$ -thin.

Consecuentemente, T es K -thin, con $K := 4\delta + c + 2H$, ya que $[x'_2, x_2]$, $[x'_3, x_3]$ y $[x'_1, x_1]$ tienen longitud menor o igual que c . □

Definición 2.11. Sea T un triángulo (no necesariamente geodésico) con vértices $\{x_1, x_2, x_3\}$; denotamos por $x_i x_j$ el lado de T que une x_i con x_j . Consideremos ahora el triángulo T' con vértices $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ tal que $x'_i x'_j$ se obtiene modificando de alguna manera $x_i x_j$. Decimos que $z \in T$ y $z' \in T'$ están en lados correspondientes si $z \in x_i x_j$ y $z' \in x'_i x'_j$ para algún i, j .

Demostración del Teorema 2.3

Asumamos que X_n es k_4 -hiperbólico para todo $n \in \Lambda$.

Consideremos un triángulo geodésico $T = \{a, b, c\}$ en X . Fijemos $z \in T$; si z pertenece simultáneamente a dos lados de T , no queda nada por probar; en otro caso, denotemos por A la unión de los otros dos lados de T a los que no pertenece z . Asumamos que, por ejemplo, $z \in [a, b]$.

Si $T \subseteq X_n$ para algún n , entonces T es $4k_4$ -thin, por el Teorema 1.8.

Asumamos que T interseca varios X_n 's. Nos proponemos estudiar T en cada uno de esos X_n 's por separado.

Fijemos $n \in \Lambda$. Para empezar, tratemos el caso en el que todos los lados de T intersecan X_n . Vamos a construir un triángulo quasigeodésico $T_n \subseteq X_n$ a partir de T de la forma siguiente: Si $[a, b] \subseteq X_n$, consideramos $[a_n, b_n] = [a, b]$. Y si $[a, b]$ no está contenido en X_n , entonces consideramos $g : [0, l] \rightarrow X$ como una geodésica orientada que une a y b . Por hipótesis, el segmento geodésico g interseca, a lo sumo, una cantidad finita de η_{nm} 's. Definimos ahora

$$t_0 := \min\{0 \leq t \leq l : g(t) \in X_n\}, \quad t_l := \max\{0 \leq t \leq l : g(t) \in X_n\}.$$

Y, si asumimos que g interseca $\cup_{m \in A_n} \eta_{nm}$, definimos

$$t_1^1 := \min\{t_0 \leq t \leq t_l : g(t) \in \cup_{m \in A_n} \eta_{nm}\}.$$

Este mínimo existe puesto que g es una función continua en un intervalo compacto y $g \cap (\cup_{m \in A_n} \eta_{nm})$ es un conjunto compacto: cada η_{nm} es un conjunto cerrado y g interseca a lo sumo una cantidad finita de η_{nm} 's.

Hay entonces un $m_1 \in A_n$ tal que $g(t_1^1) \in \eta_{nm_1}$, y definimos

$$t_1^2 := \max\{t_0 \leq t \leq t_l : g(t) \in \eta_{nm_1}\}.$$

De forma similar, definimos recursivamente

$$t_i^1 := \min\{t_{i-1}^2 < t \leq t_l : g(t) \in \cup_{m \in A_n} \eta_{nm}\};$$

Si $g(t_i^1) \in \eta_{nm_i}$, para algún $m_i \in A_n$, tomamos

$$t_i^2 := \max\{t_{i-1}^2 < t \leq t_l : g(t) \in \eta_{nm_i}\}.$$

Podemos continuar así para $1 \leq i \leq r$. Definimos ahora g' como la restricción de g al conjunto cerrado $[t_0, t_1^1] \cup [t_1^2, t_2^1] \cup \dots \cup [t_{r-1}^2, t_r^1] \cup [t_r^2, t_l]$. Observemos que $g' \subseteq X_n$. Elijamos ahora las geodésicas g_i en X_n que conectan $g(t_i^1)$ y $g(t_i^2)$. Definimos $\gamma := g' \cup g_1 \cup g_2 \cup \dots \cup g_r$. Por el Lema 2.6, se tiene que $\gamma : [0, L] \rightarrow X_n$ es una $(2 \max\{1, k_2\}, 2k_1)$ -quasigeodésica continua con su parametrización de longitud de arco (observemos que $\gamma(0) = g(t_0)$ y $\gamma(L) = g(t_l)$).

Si g no interseca $\cup_{m \in A_n} \eta_{nm}$ (o si $t_i^1 = t_i^2$ para $1 \leq i \leq r$), tomamos $\gamma = g$.

Asumamos ahora que γ interseca $\cup_{m \notin A_n} \eta_{nm}$. Si repetimos el argumento anterior, podemos encontrar un $m^1 \notin A_n$ para el que

$$s_1^1 := \min\{0 \leq s \leq L : \gamma(s) \in \eta_{mm^1}\}, \quad s_1^2 := \max\{0 \leq s \leq L : \gamma(s) \in \eta_{mm^1}\}.$$

De forma similar, existen m^2, \dots, m^j , y podemos definir recursivamente, para $i = 2, \dots, j$

$$s_i^1 := \min\{s_{i-1}^2 < s \leq L : \gamma(s) \in \eta_{mm^i}\}, \quad s_i^2 := \max\{s_{i-1}^2 < s \leq L : \gamma(s) \in \eta_{mm^i}\}.$$

Definimos γ' como la restricción de γ al conjunto cerrado $[0, s_1^1] \cup [s_1^2, s_2^1] \cup \dots \cup [s_j^2, L]$; también es cierto que $\gamma' \subseteq X_n$. Elijamos ahora geodésicas h_i en X_n que conecten $\gamma(s_i^1)$ y $\gamma(s_i^2)$. Definimos $\alpha_1 := \gamma' \cup h_1 \cup h_2 \cup \dots \cup h_j$. Si $\alpha_1 : [0, l_1] \rightarrow X_n$ es su parametrización de longitud de arco, el Lema 2.7 nos permite asegurar que α_1 es una $(2 \max\{1, k_2\}, 2k_1 + 2k_3)$ -quasigeodésica.

Si γ no interseca $\cup_{m \notin A_n} \eta_{nm}$ (o si $s_i^1 = s_i^2$ para $1 \leq i \leq j$), tomamos $\alpha_1 = \gamma$.

De forma similar construimos las quasigeodésicas $\alpha_2 : [0, l_2] \rightarrow X_n$ y $\alpha_3 : [0, l_3] \rightarrow X_n$ correspondientes a los lados $[b, c]$ y $[c, a]$, respectivamente.

Observemos que si $\alpha_1(l_1) \neq \alpha_2(0)$, entonces ambos puntos pertenecen a algún η_{nm} , puesto que tenemos una descomposición en árbol; por la condición (b) se tiene que $d_{X_n}(\alpha_1(l_1), \alpha_2(0)) \leq k_1$. Esto mismo es cierto si $\alpha_2(l_2) \neq \alpha_3(0)$, y si $\alpha_3(l_3) \neq \alpha_1(0)$. Por tanto, $T_n := \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ es un triángulo $(2 \max\{1, k_2\}, 2k_1 + 2k_3, k_1)$ -quasigeodésico. El Lema 2.10 nos permite afirmar que T_n es δ_1 -thin, con $\delta_1 = k_1 + 4k_4 + 2H(k_4, 2 \max\{1, k_2\}, 4k_1 + 2k_3)$, donde H es la constante del Teorema 1.15.

Si $z \in X_n$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $z \in \alpha_1$; si $A' := \alpha_2 \cup \alpha_3$, entonces existe $z' \in A'$ con $d_{X_n}(z, A') = d_{X_n}(z, z') \leq \delta_1$. Si $z' \in A$, entonces $d_X(z, A) \leq \delta_1$;

en caso contrario, existe $z_0 \in A$ tal que $d_{X_n}(z_0, z') \leq k_1/2$; por tanto, $d_X(z, A) \leq d_{X_n}(z, z') + d_{X_n}(z', z_0) \leq \delta_1 + k_1/2$.

Si únicamente dos lados de T intersecan X_n , se tiene el mismo resultado, puesto que se puede considerar un biángulo como un triángulo en el que dos de sus vértices coinciden. Con esto concluimos la prueba del Corolario 2.4.

A continuación terminaremos la prueba del Teorema 2.3

Si $A \cap X_n = \emptyset$, entonces z pertenece a alguna geodésica $g_0 \subseteq g$ que une cierta η_{mk} consigo misma, de forma que $A \cap X_m \neq \emptyset$, puesto que tenemos una descomposición en árbol. Por (b), existe $z' \in g_0 \cap \eta_{mk}$ con $d_X(z, z') \leq k_1/2$, y entonces, existe $z_0 \in A \cap X_m$ tal que $d_{X_m}(z_0, z') \leq \delta_1 + k_1/2$. Por tanto, $d_X(z, A) \leq \delta_1 + k_1$, y X es δ -thin con $\delta := 2k_1 + 4k_4 + 2H(k_4, 2 \max\{1, k_2\}, 4k_1 + 2k_3)$.

Asumamos ahora que X es δ -hiperbólico.

Vamos a probar que la inclusión $i : X_n \longrightarrow X$ es una $(2 \max\{1, k_2\}, 2k_1 + 2k_3)$ -quasi-isometría.

Dados $x, y \in X_n$, se tiene que $d_X(x, y) \leq d_{X_n}(x, y)$, puesto que hay más curvas uniendo x e y en X que en X_n . Para probar la otra desigualdad, consideremos una geodésica g en X uniendo x e y . Si $g \subseteq X_n$, entonces $d_X(x, y) = d_{X_n}(x, y)$. En otro caso, podemos definir $t_1^1, t_1^2, \dots, t_r^1, t_r^2, s_1^1, s_1^2, \dots, s_j^1, s_j^2$, y la $(2 \max\{1, k_2\}, 2k_1 + 2k_3)$ -quasigeodésica $\alpha_1 : [0, l_1] \longrightarrow X_n$ uniendo x e y como en la prueba de la primera parte del teorema. Puesto que α_1 está parametrizada por su longitud de arco, $\frac{1}{2} \min\{1, k_2^{-1}\} L(\alpha_1) - 2(k_1 + k_3) \leq d_X(\alpha_1(0), \alpha_1(l_1)) = d_X(x, y)$.

Ya que α_1 es una curva continua en X_n que une x e y , $d_{X_n}(x, y) \leq L(\alpha_1)$, y, por tanto

$$\frac{1}{2} \min\{1, k_2^{-1}\} d_{X_n}(x, y) - 2(k_1 + k_3) \leq d_X(x, y) \leq d_{X_n}(x, y).$$

Esto implica que si X es δ -hiperbólico, (ver [16, p.88]), entonces X_n es:

$$4 \max\{1, k_2\} (2\delta + k_1 + k_3 + H(\delta, 2 \max\{1, k_2\}, 2k_1 + 2k_3))\text{-thin}.$$

Cabe destacar que para demostrar la hiperbolicidad de X_n no hemos utilizado en ningún momento que las otras piezas sean de árbol. De esta forma queda también probado el Corolario 2.5. \square

El Teorema 2.14 enunciado más adelante, permite trasladar el estudio de la hiperbolicidad de un espacio X a otro espacio Y de estructura más sencilla, siempre y cuando entre ambos exista un cierto tipo de relación descrita por la siguiente definición.

Definición 2.12. *Decimos que dos espacios métricos geodésicos X e Y (en este mismo orden) tienen descomposiciones comparables, si existen descomposiciones $\{X_n\}_{n \in \Lambda}$ de X e $\{Y_n\}_{n \in \Lambda}$ de Y , y constantes k_i , con las siguientes propiedades:*

- (a) *Si $X_n \cap X_m = \cup_{i \in I_{nm}} \eta_{nm}^i$, entonces $Y_n \cap Y_m = \cup_{i \in I_{nm}} \sigma_{nm}^i$, y $\sigma_{nm}^i = \emptyset$ si y sólo si $\eta_{nm}^i = \emptyset$.*
- (b) *Para todos n, m, i , $\text{diam}_{X_n}(\eta_{nm}^i) \leq k_1$ y $\text{diam}_{Y_n}(\sigma_{nm}^i) \leq k_1$.*
- (c) *Podemos dividir Λ en $F \cup G$ y a su vez F en $F_1 \cup F_2$ de forma que:*
 - (c1) *Si $n \in G$, X_n es una (k_1, k_2, k_3) -pieza de árbol.*
 - (c2) *Si $n \in F$, $\text{diam}_{X_n}(\eta_{nm}^i) \leq k_2 d_{X_n}(\eta_{nm}^i, \eta_{nk}^j)$ y $\text{diam}_{Y_n}(\sigma_{nm}^i) \leq k_2 d_{Y_n}(\sigma_{nm}^i, \sigma_{nk}^j)$, si $(m, i) \neq (k, j)$.*
 - (c3) *Si $n \in F_1$, para cada $\eta_{nm}^i \neq \eta_{nk}^j$, existe una geodésica γ_{mnk}^{ij} en X_n , que une η_{nm}^i con η_{nk}^j , y una (k_4, b_{mnk}^{ij}) -quasi-isometría $f_{mnk}^{ij} : \gamma_{mnk}^{ij} \longrightarrow h_{mnk}^{ij} \subseteq Y_n$, con h_{mnk}^{ij} comenzando en σ_{nm}^i y terminando en σ_{nk}^j , verificando $\sum_{n \in F_1} \sum_{m, k, i, j} b_{mnk}^{ij} \leq k_5$, de forma que, para cualquier $x, y \in \cup_{m, k, i, j} \gamma_{mnk}^{ij}$, con puntos correspondientes $x', y' \in \cup_{m, k, i, j} h_{mnk}^{ij}$, se tiene que $k_4^{-1} d_{X_n}(x, y) - k_5 \leq d_{Y_n}(x', y')$.*
 - (c4) *Si $n \in F_2$, existe una $(k_4, 0)$ -quasi-isometría $f_n : X_n \longrightarrow Y_n$, con $f_n(\eta_{nm}^i) \subseteq \sigma_{nm}^i$.*

Observación 2.13.

1. *Obviamente, estas condiciones sólo se aplican para $\eta_{nm}^i, \sigma_{nm}^i \neq \emptyset$.*
2. *No es necesario que los conjuntos Λ, F, G e I_{nm} sean numerables.*
3. *Por supuesto, $\eta_{nm}^i = \eta_{mn}^i$ e $I_{nm} = I_{mn}$.*
4. *La hipótesis (c2) se cumple trivialmente si para $n \in F$, $d_{X_n}(\eta_{nm}^i, \eta_{nk}^j) \geq k'_2$ y $d_{Y_n}(\sigma_{nm}^i, \sigma_{nk}^j) \geq k'_2$, por (b).*
5. *Se puede debilitar la hipótesis (c3) de la forma siguiente: consideremos cualquier componente conexa B_s de $\cup_{n \in F} X_n$; la prueba del Teorema 2.14 permite afirmar que es suficiente tener $\sum_{n \in F_1^s, m, k, i, j} b_{mnk}^{ij} \leq k_5$, para cualquier s , donde $F_1^s := \{n \in F_1 : X_n \subseteq B_s\}$ (véase la forma en que se construye T_2 en la demostración del Teorema 2.14).*
6. *Como consecuencia de (c3), se tiene que $k_4^{-1} d_{X_n}(x, \eta_{nr}^t) - k_1 - k_5 \leq d_{Y_n}(f_{mnk}^{ij}(x), \sigma_{nr}^t)$, para todos r, t y $x \in \gamma_{mnk}^{ij}$.*

7. Puesto que verificar la condición (c3) puede resultar una labor tediosa, quizás resulte interesante comprobar en su lugar la siguiente afirmación, que implica (c3).

(c3') Si $n \in F_1$, se tiene que $k_7^{-1} \leq d_{X_n}(\eta_{nm}^i, \eta_{nk}^j) / d_{Y_n}(\sigma_{nm}^i, \sigma_{nk}^j) \leq k_7$, $\text{diam}_{X_n}(\cup_{mi} \eta_{nm}^i) \leq k_8$ y $\text{diam}_{Y_n}(\cup_{mi} \sigma_{nm}^i) \leq k_8$.

En la descomposición de X se pueden encontrar piezas de dos tipos diferentes: $\{X_n\}_{n \in F}$ y $\{X_n\}_{n \in G}$. Las conexiones entre una pieza X_n , con $n \in G$, y el resto de las piezas son muy sencillas por ser X_n una pieza de árbol. Las conexiones de las piezas X_n , con $n \in F$, no tienen restricciones topológicas; por tanto, además de (b) y (c2) (igual que en el caso $n \in G$), debe haber algún control adicional: las condiciones (c3) y (c4) nos permiten asegurar que las conexiones entre X_n y el resto de las piezas deben ser parecidas a las que hay en Y_n . Nótese que la condición (c3) involucra sólo a un pequeño subconjunto de puntos de cada X_n , con $n \in F_1$.

A pesar de alargar la Definición 2.12, dividir Λ en la unión de tres tipos de conjuntos F_1, F_2 y G resulta muy conveniente: por una parte, cuanto mayor sea el abanico de posibilidades, más fácil resultará encajar una pieza en una de las opciones disponibles. Por otro lado, la elección de las condiciones que X_n debe verificar cuando n pertenece a F_1, F_2 o G , no es, en absoluto, arbitraria. De hecho, lo que subyace detrás es una adecuada modelización del siguiente problema en superficies de Riemann (ver [29]): dada una superficie de Riemann S , se puede obtener otra S^* a partir de S eliminando una unión de conjuntos cerrados simplemente conexos $\{E_m\}_{m \in M}$. En [29] se prueba que S es hiperbólica si y sólo si S^* lo es, siempre y cuando los conjuntos $\{E_m\}$ estén “suficientemente separados” entre sí. El Teorema 2.14 interviene en la prueba de esta última afirmación: la estrategia consiste en considerar como piezas $\{S_m\}$ (en S^* tomamos $S_m^* := S_m \setminus E_m$) entornos de $\{E_m\}$. G se define como el conjunto de m 's que pertenecen a M tales que S_m es una pieza de árbol; F_1 es el resto de los índices de M , y F_2 es el conjunto de índices que parametriza las componentes conexas de $S \setminus \cup_{m \in M} S_m$ (en S^* tomamos las mismas componentes conexas). La formulación final de la Definición 2.12 se ha hecho abstrayendo las propiedades fundamentales de las piezas de cada uno de los tres conjuntos.

Teorema 2.14. Sean X e Y dos espacios métricos geodésicos con descomposiciones comparables. Si Y es δ' -hiperbólico y existe una constante k_6 tal que X_n es k_6 -hiperbólico para todo $n \in \Lambda \setminus F_2$, entonces X es δ -hiperbólico, con δ una constante que sólo depende de δ' y k_i .

Hay una expresión explícita de δ al final de la demostración del Teorema 2.14.

(Se puede consultar la demostración de este teorema en la página 34).

Es obvio que la condición (c_4) es mucho más restrictiva que (c_3) . Sin embargo, es un pequeño precio a pagar a cambio de no tener que comprobar la hiperbolicidad de las piezas de F_2 .

En cierto modo podemos considerar este teorema como una versión del Teorema 1.13: si $\Lambda = F_1$, la condición (c_3) dice, de alguna manera, que existe una quasi-isometría de un pequeño subconjunto de X sobre un subconjunto de Y . Desde un punto de vista dual, podemos considerar que existe una quasi-isometría de un subconjunto de Y sobre un subconjunto de X ; en este caso se obtiene el sorprendente resultado de que la hiperbolicidad del espacio de partida implica la hiperbolicidad del espacio de llegada.

La hiperbolicidad de X no implica la hiperbolicidad uniforme de X_n en general (esta es otra diferencia con el Teorema 2.3). De hecho, la hiperbolicidad de X no garantiza la hiperbolicidad de cada X_n , como prueba el siguiente ejemplo: sea X_1 el grafo de Cayley del grupo \mathbb{Z}^2 , y X_2 el árbol con una cantidad numerable de aristas de longitud 1 con un vértice común v_0 ; construimos ahora X pegando de forma biyectiva cada vértice de X_2 (excepto v_0) con un vértice de X_1 ; es evidente que X es hiperbólico, puesto que está acotado, pero que X_1 no lo es. Análogamente, es fácil construir un grafo localmente finito $X = \cup_n X_n$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(X_n) = \infty$.

A continuación daremos algunas condiciones que garantizan la hiperbolicidad de X_n .

Proposición 2.15. *Sea X un espacio métrico geodésico δ -hiperbólico, con una descomposición como la de la Definición 2.12. Si para algún $n \in \Lambda$ existen constantes $k_7 \geq 1, k_8 \geq 0$, con $d_{X_n}(\eta_{nm}^i, \eta_{nk}^j) \leq k_7 d_X(\eta_{nm}^i, \eta_{nk}^j) + k_8$, para algún m, k, i, j , entonces X_n es k_6 -hiperbólico, con $k_6 := 4k_7(4\delta + k_7^{-1}(2k_1 + k_8) + 2H(\delta, k_7, k_7^{-1}(2k_1 + k_8)))$, donde H es la constante del Teorema 1.15.*

(Se puede consultar la demostración de esta proposición en la página 43).

El siguiente resultado es más débil que el de la Proposición 2.15, pero tiene la ventaja adicional de que sólo involucra distancias en X_n . De hecho, es el mejor resultado posible de carácter general que utiliza tan sólo distancias en X_n , y que además permite obtener constantes más precisas.

Proposición 2.16. *Sea X un espacio métrico geodésico δ -hiperbólico con una descomposición como la de la Definición 2.12. Si, para algún $n \in \Lambda$, existe una constante positiva k_7 con $\text{diam}_{X_n}(\cup_{mi} \eta_{nm}^i) \leq k_7$, entonces X_n es $(\delta + 3k_7/2)$ -hiperbólico.*

(Se puede consultar la demostración de esta proposición en la página 44).

Corolario 2.17. *Asumamos que X e Y son dos espacios métricos geodésicos con descomposiciones comparables, que Y es hiperbólico, y que existe una constante positiva k_7 con $\text{diam}_{X_n}(\cup_{mi} \eta_{nm}^i) \leq k_7$ para todo $n \in \Lambda$. Entonces X es hiperbólico si y sólo si existe una constante k_6 tal que X_n es k_6 -hiperbólico para todo $n \in \Lambda$.*

Demostración del Teorema 2.14

Consideremos un triángulo geodésico $T = \{a, b, c\}$ en X . Es obvio que si $T \subseteq X_n$ para algún $n \in \Lambda \setminus F_2$, entonces T es $4k_6$ -thin por hipótesis. En otro caso (es decir, si $T \subseteq X_n$ con $n \in F_2$ o si T interseca varios X_n 's), la idea fundamental de la prueba radica en elegir sucesivos triángulos quasigeodésicos T_1, T_2, T_3, T_4 en X (estrechamente relacionados con T), que permitirán construir un triángulo quasi-geodésico T_5 en Y (relacionado con T_4). Puesto que Y es hiperbólico, T_5 es thin por el Lema 2.10, y esta información nos servirá para concluir que también T es thin. Uno de los principales obstáculos es que, aunque X e Y tienen conexiones similares entre sus componentes, cada par de espacios X_n e Y_n pueden ser muy diferentes entre sí (de hecho, no tiene por qué existir una quasi-isometría entre X_n e Y_n).

Aunque la idea de la demostración no es complicada, la prueba es muy larga y técnica; para conseguir la máxima transparencia en la línea argumental, agruparemos algunos de los resultados que necesitamos en forma de lemas técnicos. Dejaremos la demostración de la mayoría de ellos para el final del capítulo.

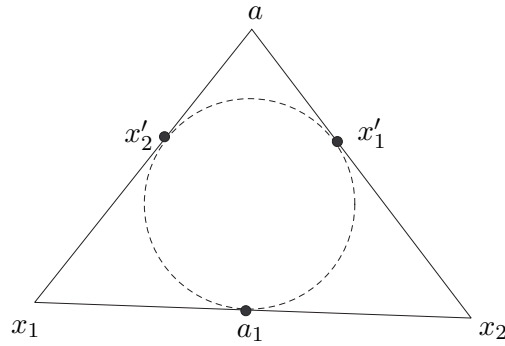
Un objetivo parcial consiste en obtener un triángulo T_4 en X que sea fácilmente transformable en otro triángulo T_5 en Y (de hecho, $T \cap X_n$ está contenido en $\cup_{m,k,i,j} \gamma_{mnk}^{ij}$ si $n \in \Lambda \setminus F_2$). Para conseguir esto, el primer paso es construir un triángulo T_1 en X tal que para todo $n \in \Lambda \setminus F_2$, cada componente conexa de $T_1 \cap X_n$ sea una geodésica de X_n . Recordemos que, aunque cada componente conexa de $S \cap X_n$ de cualquier lado S de T es una geodésica en X_n , pueden existir componentes conexas de $T \cap X_n$ (conteniendo un vértice de T) que no son geodésicas en X_n .

Comencemos con la construcción de T_1 .

Asumamos que la pieza X_n contiene al menos un vértice a de T . Si $n \in F_2$, no cambiamos $T \cap X_n$. (En particular, si $T \subseteq X_n$, con $n \in F_2$, entonces $T_1 = T$.) Consideremos ahora $n \in \Lambda \setminus F_2$, y llamemos η_a a la componente conexa $T \cap X_n$ que contiene a a .

Caso 1. Asumamos primero que η_a contiene sólo un vértice de T . Denotamos por x_1, x_2 los

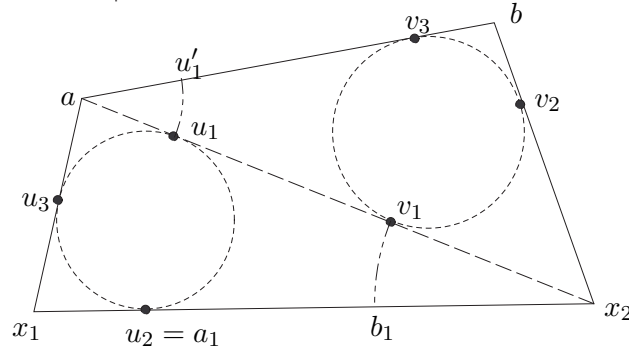
extremos de η_a . Definimos ahora el triángulo geodésico $T_a = \{a, x_1, x_2\}$ en X_n con $[a, x_1], [a, x_2] \subset T$. Denotamos por a_1, x'_1, x'_2 los puntos internos de T_a en las geodésicas $[x_1, x_2], [a, x_2], [a, x_1]$ respectivamente. Definimos $\eta_{a_1} := [x_1, x_2] = [x_1, a_1] \cup [a_1, x_2] \subset T_a$. Si $b \in X_m$ (donde m puede o no coincidir con n) y la componente conexa η_b de $T \cap X_m$ que contiene a b no contiene a c , podemos a continuación proceder con los vértices b, c de forma similar a lo que acabamos de hacer con a . En este caso, definimos T_1 como el triángulo (no necesariamente geodésico) que conecta los vértices a_1, b_1, c_1 , y que se obtiene a partir de T reemplazando η_a, η_b, η_c por $\eta_{a_1}, \eta_{b_1}, \eta_{c_1}$ respectivamente.



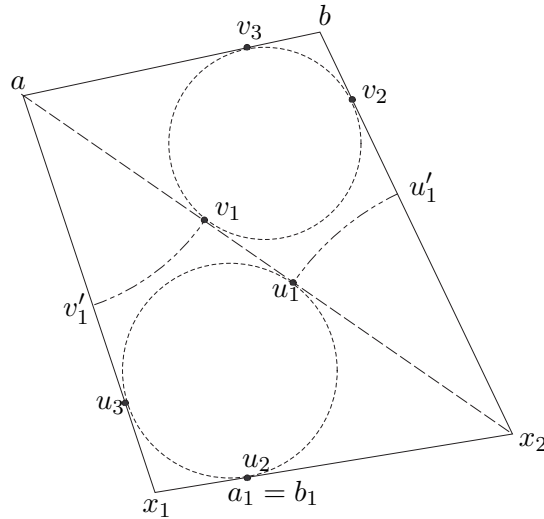
Caso 2. Asumamos ahora que $b \in \eta_a$ y $c \notin \eta_a$.

Sin pérdida de generalidad, podemos considerar que η_a comienza en x_1 , termina en x_2 , y que se encuentra con a antes que con b . Consideremos el cuadrilátero $\eta_a \cup [x_1, x_2] \subseteq X_n$ y dibujemos su diagonal $[a, x_2]$ (un resultado similar puede obtenerse dibujando $[b, x_1]$); obtenemos así dos triángulos geodésicos en X_n : $T_a = \{a, x_1, x_2\}$ (con puntos internos $u_1 \in [a, x_2], u_2 \in [x_1, x_2]$ y $u_3 \in [a, x_1]$), $T_b = \{a, b, x_2\}$ (con puntos internos $v_1 \in [a, x_2], v_2 \in [b, x_2]$ y $v_3 \in [a, b]$).

Caso 2.1 Consideremos primero la situación $d_{X_n}(x_2, v_1) < d_{X_n}(x_2, u_1)$. Denotamos por b_1 al punto en $[x_1, x_2]$ con $d_{X_n}(x_2, b_1) = d_{X_n}(x_2, v_1)$ y llamamos $a_1 := u_2$. Podemos así definir $\eta_{a_1} := [x_1, x_2] = [x_1, a_1] \cup [a_1, b_1] \cup [b_1, x_2] \subset T_a$, y η_{c_1} como en el Caso 1. Construimos entonces el triángulo T_1 a partir de T , conectando los vértices a_1, b_1, c_1 , y reemplazando η_a, η_c por η_{a_1}, η_{c_1} respectivamente.



Caso 2.2. Consideremos ahora la situación $d_{X_n}(x_2, v_1) \geq d_{X_n}(x_2, u_1)$. Si llamamos $a_1 := b_1 := u_2$, podemos definir $\eta_{a_1} := [x_1, x_2] = [x_1, a_1] \cup [a_1, x_2] \subset T_a$, y η_{c_1} como en el Caso 1. Construimos entonces el biángulo T_1 a partir de T , conectando los vértices a_1, c_1 , y reemplazando η_a, η_c por η_{a_1}, η_{c_1} respectivamente.

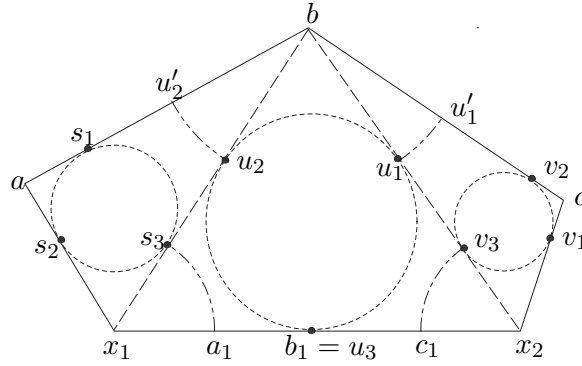


Caso 3. Para finalizar, asumamos que $b, c \in \eta_a$. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar que η_a comienza en x_1 , termina en x_2 , y que se encuentra con a antes que con b , y con b antes que con c .

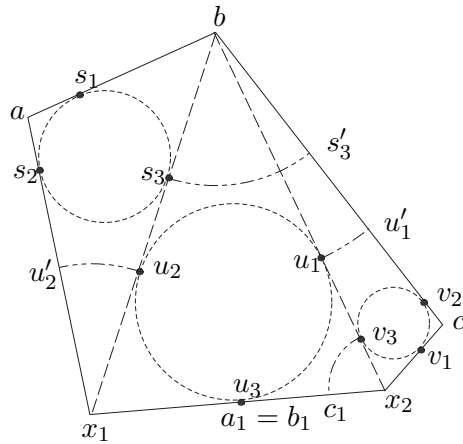
Consideremos el pentágono $\eta_a \cup [x_1, x_2] \subseteq X_n$ y dibujemos sus diagonales $[x_1, b]$, $[b, x_2]$, obteniendo por este procedimiento tres triángulos geodésicos en X_n : $T_a = \{a, b, x_1\}$ (con puntos internos $s_1 \in [a, b]$, $s_2 \in [a, x_1]$, $s_3 \in [b, x_1]$), $T_b = \{b, x_1, x_2\}$ (con puntos internos $u_1 \in$

$[b, x_2], u_2 \in [b, x_1]$ y $u_3 \in [x_1, x_2]$), $T_c = \{b, c, x_2\}$ (con puntos internos $v_1 \in [c, x_2], v_2 \in [b, c]$ y $v_3 \in [b, x_2]$).

Caso 3.1. Consideremos primero la situación $d_{X_n}(x_1, s_3) < d_{X_n}(x_1, u_2)$ y $d_{X_n}(x_2, v_3) < d_{X_n}(x_2, u_1)$. Denotemos por a_1 el punto de $[x_1, x_2]$ con $d_{X_n}(x_1, a_1) = d_{X_n}(x_1, s_3)$, y por c_1 el punto de $[x_1, x_2]$ con $d_{X_n}(x_2, c_1) = d_{X_n}(x_2, v_3)$. Si llamamos $b_1 := u_3$, podemos definir $\eta_{a_1} := [x_1, x_2] = [x_1, a_1] \cup [a_1, b_1] \cup [b_1, c_1] \cup [c_1, x_2] \subset T_b$. Construimos así el triángulo T_1 a partir de T , conectando los vértices a_1, b_1, c_1 , y reemplazando η_a por η_{a_1} .



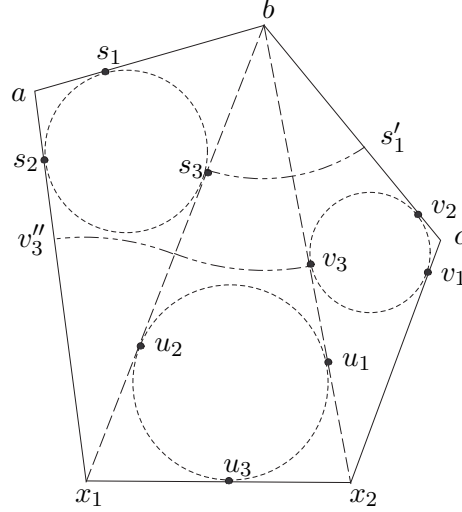
Caso 3.2. Consideremos ahora la situación $d_{X_n}(x_1, s_3) \geq d_{X_n}(x_1, u_2)$ y $d_{X_n}(x_2, v_3) < d_{X_n}(x_2, u_1)$. Llamamos $a_1 := b_1 := u_3$, y denotamos por c_1 el punto de $[x_1, x_2]$ con $d_{X_n}(x_2, c_1) = d_{X_n}(x_2, v_3)$. Podemos definir $\eta_{a_1} := [x_1, x_2] = [x_1, a_1] \cup [a_1, c_1] \cup [c_1, x_2] \subset T_b$. Construimos ahora el biángulo T_1 a partir de T , conectando los vértices a_1, c_1 , y reemplazando η_a por η_{a_1} .



Caso 3.3. La situación $d_{X_n}(x_1, s_3) < d_{X_n}(x_1, u_2)$ y $d_{X_n}(x_2, v_3) \geq d_{X_n}(x_2, u_1)$ es simétrica a

la del Caso 3.2, intercambiando los papeles de a y c .

Caso 3.4. Por último, consideramos la situación $d_{X_n}(x_1, s_3) \geq d_{X_n}(x_1, u_2)$ y $d_{X_n}(x_2, v_3) \geq d_{X_n}(x_2, u_1)$. En este caso, no construimos el triángulo T_1 .



Lema 2.18. Si T_1 es δ_1 -thin, entonces T es δ_0 -thin, con $\delta_0 := \max\{\delta_1 + 16k_6, 18k_6\}$.

Puede consultarse la demostración del Lema 2.18 en la Sección 2.3 (donde aparece etiquetado como 2.29).

El siguiente lema enuncia un hecho elemental:

Lema 2.19. Consideremos un espacio métrico X , un intervalo I , una (a, b) -quasigeodésica $g : I \rightarrow X$ y una curva $g_1 : I \rightarrow X$ tal que $d(g(t), g_1(t)) \leq c$ para todo $t \in I$. Entonces g_1 es una $(a, b + 2c)$ -quasigeodésica.

Demostración. Para todos $s, t \in I$, se verifica que

$$\begin{aligned} d(g_1(t), g_1(s)) &\leq d(g_1(t), g(t)) + d(g(t), g(s)) + d(g(s), g_1(s)) \leq a|t - s| + b + 2c, \\ d(g_1(t), g_1(s)) &\geq d(g(t), g(s)) - d(g_1(t), g(t)) - d(g(s), g_1(s)) \geq a^{-1}|t - s| - b - 2c. \end{aligned}$$

□

Lema 2.20. *Cada lado de T_1 es una $(1, 16k_6)$ -quasigeodésica con su parametrización de longitud de arco. Además, cada componente conexa de $T_1 \cap X_n$ es una geodésica en X_n , si $n \in \Lambda \setminus F_2$.*

Se puede consultar la demostración del Lema 2.20 en la Sección 2.3 (donde aparece etiquetado como 2.30).

Como segundo paso, vamos a dividir el triángulo T_1 en varios trozos; el Corolario 2.4 nos permite desestimar aquellas partes de T_1 que intersecan los subespacios X_n con $n \in G$ (ver Lema 2.21).

Consideramos las componentes conexas $\{B_s\}_{s \in S}$ del conjunto $\cup_{n \in F} X_n$. Podemos estudiar el triángulo T_1 en cada subespacio de los conjuntos $\{B_s\}_{s \in S}$ y $\{X_n\}_{n \in G}$. Denotamos por T_2 el triángulo quasigeodésico $T_1 \cap B_s$, para cierto $s \in S$ fijo; de hecho, deberíamos escribir T_2^s en lugar de T_2 , pero nuestra notación es más sencilla y no hay confusión posible. Observemos que T_2 es la unión de tres lados (posiblemente no continuos) que unen a_2 con b'_2 , b_2 con c'_2 y c_2 con a'_2 .

Recordemos que queremos obtener un triángulo T_4 en X contenido en $\cup_{n,m,k,i,j} \gamma_{mnk}^{ij}$. El tercer paso consistirá en construir el triángulo T_3 eliminando de T_2 las componentes conexas de $T_2 \cap X_n$ que unen algún η_{nm}^i consigo mismo.

Definimos entonces el triángulo T_3 de la forma siguiente:

Sin pérdida de generalidad podemos considerar un lado g_1 de T_1 como la curva orientada desde a_1 a b_1 . Se tiene que $a_2 = g_1(\alpha)$ y $b'_2 = g_1(\beta)$, para ciertos números reales $\alpha < \beta$. Por hipótesis, g_1 interseca a lo sumo un número finito de η_{nm}^i 's. Asumamos que g_1 interseca $\cup_{n,m,i} \eta_{nm}^i$. Si $g_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow X$, definimos

$$t_1^1 := \min\{\alpha \leq t \leq \beta : g_1(t) \in \cup_{n,m,i} \eta_{nm}^i\}.$$

Este mínimo existe puesto que g_1 es una función continua en un intervalo compacto y $g_1 \cap (\cup_{n,m,i} \eta_{nm}^i)$ es un conjunto compacto: cada η_{nm}^i es un conjunto cerrado, y g_1 interseca a lo sumo un número finito de η_{nm}^i 's.

Entonces $g_1(t_1^1) \in \eta_{n_1 m_1}^{i_1}$, para ciertos n_1, m_1, i_1 , y definimos

$$t_1^2 := \max\{\alpha \leq t \leq \beta : g_1(t) \in \eta_{n_1 m_1}^{i_1}\}.$$

De forma similar, se puede definir recursivamente

$$t_j^1 := \min\{t_{j-1}^2 < t \leq \beta : g_1(t) \in \cup_{n,m,i} \eta_{nm}^i\};$$

si $g_1(t_j^1) \in \eta_{n_j m_j}^{i_j}$, para ciertos n_j, m_j, i_j ; tomamos

$$t_j^2 := \max\{t_{j-1}^2 < t \leq \beta : g_1(t) \in \eta_{n_j m_j}^{i_j}\}.$$

Extendemos estas definiciones para $1 \leq j \leq r$. Definimos $t_0^2 := \alpha$ si $\alpha \neq t_1^1$, y $t_{r+1}^1 := \beta$ si $\beta \neq t_r^2$.

Definimos g_3 (en este caso) como la restricción de g_1 al conjunto $[\alpha, t_1^1] \cup (t_1^2, t_2^1] \cup \dots \cup (t_{r-1}^2, t_r^1] \cup (t_r^2, \beta]$. Si g_1 no interseca $\cup_{n,m,i} \eta_{nm}^i$, tomamos $g_3 = g_1$. Definimos $a_3 := a_2$ si $\alpha < t_1^1$ y $a_3 := g_1(t_1^2)$ si $\alpha = t_1^1$; definimos también $b_3' := b_2'$ si $t_r^2 < \beta$ y $b_3' := g_1(t_r^1)$ si $t_r^2 = \beta$. La curva g_3 es continua entre a_3 y b_3' . Efectuamos una construcción similar con los otros lados de T_2 , y definimos el triángulo T_3 como la unión de las tres curvas así obtenidas.

Lema 2.21. *Si T_3 es δ_3 -thin, entonces T_1 es $\max\{\delta_3 + k_1, \delta^*\}$ -thin, con $\delta^* := 3k_1/2 + 4k_6 + 2H(k_6, 2 \max\{1, k_2\}, 4k_1 + 2k_3)$, donde H es la constante del Teorema 1.15.*

Demostración. Vamos a estudiar el triángulo T_1 en cada pieza de $\{B_s\}_{s \in S}$ y de $\{X_n\}_{n \in G}$.

Recordemos que de (c1) se deduce que para todo $n \in G$, X_n es una (k_1, k_2, k_3) -pieza de árbol. El Corolario 2.4 permite afirmar que $T_3 \cap X_n$ es δ^* -thin para todo $n \in G$ (podemos asumir que X_n interseca, como mínimo, dos lados de T_3 , ya que si X_n intersecara únicamente un lado de T_1 , esta parte de T_1 se habría eliminado durante la construcción de T_3 , puesto que X_n es una pieza de árbol). Vamos a tratar ahora $T_1 \cap B_s$ para cada s .

Por (b) y por la construcción de T_3 , dado cualquier $z \in T_1 \cap B_s$, existe $z_2 \in T_3$ en el lado correspondiente a z , con $d_X(z, z_2) \leq d_{X_n}(z, z_2) \leq k_1$. Entonces existe w en la unión de los otros dos lados de T_3 con $d_X(w, z_2) \leq \delta_3$. El hecho de que $T_3 \subseteq T_1 \cap B_s$, concluye la prueba. \square

Lema 2.22. *Cada lado de T_3 es una $(1 + k_2, k_1 + 16k_6)$ -quasigeodésica con su parametrización de longitud de arco. Además, cada componente conexa de $T_3 \cap X_n$ es una geodésica en X_n , si $n \in F_1$.*

Se puede consultar la demostración del Lema 2.22 en la Sección 2.3 (donde aparece etiquetado como 2.31).

Observación 2.23. *Tras la construcción de T_3 y de los lemas 2.21 y 2.22, sin pérdida de generalidad podemos asumir que hay una única componente B_s , es decir, que T_3 es un triángulo $(1 + k_2, k_1 + 16k_6, k_1)$ -quasigeodésico en X , con $\Lambda = F$ y $G = \emptyset$.*

Vamos a construir el triángulo T_4 cambiando cada segmento geodésico de T_3 que une η_{nm}^i con η_{nk}^j por una nueva geodésica γ_{mnk}^{ij} . El triángulo así obtenido, junto con las condiciones (c3) y (c4) nos permitirán definir un nuevo triángulo T_5 en Y de forma evidente.

Veamos a continuación los detalles sobre la construcción de T_4 :

Cada componente conexa de T_3 es un segmento geodésico g_{mnk}^{ij} en algún X_n , que une η_{nm}^i con η_{nk}^j . Si $n \in F_1$, aplicando (c3) deducimos que, para cada g_{mnk}^{ij} , existe una geodésica γ_{mnk}^{ij} en X_n , uniendo η_{nm}^i con η_{nk}^j , y una (k_4, b_{mnk}^{ij}) -quasi-isometría $f_{mnk}^{ij} : \gamma_{mnk}^{ij} \longrightarrow h_{mnk}^{ij} \subseteq Y_n$. Si $n \in F_2$, definimos f_{mnk}^{ij} como la restricción de f_n a g_{mnk}^{ij} , $\gamma_{mnk}^{ij} := g_{mnk}^{ij}$, y $h_{mnk}^{ij} := f_{mnk}^{ij}(\gamma_{mnk}^{ij})$. (Entonces, f_{mnk}^{ij} es una (k_4, b_{mnk}^{ij}) -quasi-isometría, con $b_{mnk}^{ij} := 0$.)

Construimos T_4 en X reemplazando cada g_{mnk}^{ij} por γ_{mnk}^{ij} . Sólo necesitamos elegir los vértices de T_4 , si es que algún vértice de T_3 está en $\cup_{n \in F_1} X_n$:

Consideremos $n \in F_1$ y las parametrizaciones de longitud de arco $g_{mnk}^{ij} : [0, l] \longrightarrow X$ y $\gamma_{mnk}^{ij} : [0, l'] \longrightarrow X$. Observemos primero que, aplicando (c2), se tiene que $l' - l = L_X(\gamma_{mnk}^{ij}) - L_X(g_{mnk}^{ij}) \leq \text{diam}_{X_n}(\eta_{nm}^i) + \text{diam}_{X_n}(\eta_{nk}^j) \leq 2k_2 L_X(g_{mnk}^{ij}) = 2k_2 l$. Concluimos entonces que $l'/l \leq 1 + 2k_2$, y, simétricamente $l/l' \leq 1 + 2k_2$.

Lema 2.24. *Consideremos una función biyectiva absolutamente continua entre dos intervalos $u : I \longrightarrow J$ con $c^{-1} \leq |u'| \leq c$, y una (a, b) -quasigeodésica $g : J \longrightarrow X$. Entonces $g \circ u : I \longrightarrow X$ es una (ac, b) -quasigeodésica.*

Demostración. Se verifica que $c^{-1}|t - s| \leq |u(t) - u(s)| \leq c|t - s|$, y, por tanto,

$$\begin{aligned} a^{-1}c^{-1}|t - s| - b &\leq a^{-1}|u(t) - u(s)| - b \leq d(g(u(t)), g(u(s))) \\ &\leq a|u(t) - u(s)| + b \leq ac|t - s| + b. \end{aligned}$$

□

Lema 2.25. *Consideremos dos geodésicas $\gamma_1 : [0, l_1] \longrightarrow X$ y $\gamma_2 : [0, l_2] \longrightarrow X$ en un espacio X δ -fine, con $d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) \leq c$ y $d(\gamma_1(l_1), \gamma_2(l_2)) \leq c$. Entonces $d(\gamma_1(t), \gamma_2(l_2 t / l_1)) \leq 2\delta + 7c$, para $t \in [0, l_1]$.*

La demostración de este resultado puede consultarse en la Sección 2.3 (donde aparece etiquetado como Lema 2.32).

Tomemos la reparametrización $g_{mnk}^{ij}(lt/l') : [0, l'] \rightarrow X$ de g_{mnk}^{ij} ; recordemos que $l'/l, l/l' \leq 1 + 2k_2$. Usando estas reparametrizaciones locales, si $G_3 : J_0 \rightarrow X$ y $G_4 : I_0 \rightarrow X$ son parametrizaciones de longitud de arco de T_3 y T_4 (respectivamente), podemos construir una biyección global $u : I_0 \rightarrow J_0$ (que es, de hecho, una yuxtaposición continua de líneas rectas) con $(1 + 2k_2)^{-1} \leq |u'| \leq 1 + 2k_2$. Puesto que $G_3 \circ u$ y G_4 están definidas sobre el mismo intervalo I_0 , si $(G_3 \circ u)(t_0)$ es un vértice de T_3 , para cierto $t_0 \in I_0$, podemos definir $G_4(t_0)$ como su vértice correspondiente de T_4 . Los Lemas 2.22 y 2.24 permiten asegurar que si $g_3 = (G_3 \circ u)|_I$, es un lado de T_3 , para cierto intervalo I , entonces g_3 es una $((1 + k_2)(1 + 2k_2), k_1 + 16k_6)$ -quasigeodésica. Observemos que $g_4 := G_4|_I$ es una parametrización de longitud de arco del lado de T_4 correspondiente a g_3 . Puesto que se cumple (b), aplicando el Lema 2.25 se verifica que $d_X(g_3(t), g_4(t)) \leq 8k_6 + 7k_1$, para todo $t \in I$. Entonces, el Lema 2.19 implica que g_4 es una $((1 + k_2)(1 + 2k_2), 15k_1 + 32k_6)$ -quasigeodésica. Así se obtiene el siguiente resultado.

Lema 2.26. *Cada lado de T_4 es una $((1 + k_2)(1 + 2k_2), 15k_1 + 32k_6)$ -quasigeodésica con su parametrización de longitud de arco. Además, cada componente conexa de $T_4 \cap X_n$ es una geodésica en X_n , si $n \in F_1$. Si T_4 es δ_4 -thin, entonces T_3 es $(\delta_4 + 14k_1 + 16k_6)$ -thin.*

Demostración. Ya hemos demostrado las dos primeras afirmaciones. Para probar la última, sólo necesitamos destacar el hecho de que, para todo punto de cualquier lado de T_3 existe otro en su lado correspondiente en T_4 que está, a lo sumo, a distancia $7k_1 + 8k_6$; el mismo resultado es cierto si intercambiamos los papeles de T_3 y T_4 . \square

Observemos que si $T \subseteq X_n$, con $n \in F_2$, entonces $T_4 = T$.

Hasta ahora hemos ido modificando paulatinamente el triángulo original en X para obtener uno nuevo que hemos llamado T_4 , y que puede ser ahora fácilmente transformado en otro triángulo T_5 en Y , reemplazando $\gamma_{mnk}^{ij} \subseteq X_n$ por $h_{mnk}^{ij} \subseteq Y_n$. Vamos a tomar ahora la parametrización canónica $f_{mnk}^{ij}(\gamma_{mnk}^{ij}(t))$ en h_{mnk}^{ij} , donde t es la parametrización de longitud de arco para γ_{mnk}^{ij} .

Lema 2.27. *Cada lado de T_5 es una (d_1, d_2) -quasigeodésica con su parametrización canónica,*

donde

$$\begin{aligned} d_0 &:= (1 + k_2)(1 + 2k_2)k_4, \\ d_1 &:= d_0(1 + k_2)(1 + 2k_2), \text{ y} \\ d_2 &:= \max \{ k_1 + (1 + k_2)k_5, k_4(15k_1 + 32k_6) + k_5, \\ &\quad + d_0^{-1}(17k_1 + 32k_6) + 2(k_1 + k_5) + (1 + 2k_2)^{-1}k_5 \}. \end{aligned}$$

De hecho, la demostración del Lema 2.27 (ver Sección 2.3, Lema 2.33), proporciona también el siguiente resultado:

Corolario 2.28. *Para todos $x, y \in T_4$ con puntos correspondientes $x', y' \in T_5$, se tiene que $d_X(x, y) \leq d_0 d_Y(x', y') + 2k_1 + d_0(2(k_1 + k_5) + (1 + 2k_2)^{-1}k_5)$.*

Por el Lema 2.27, los lados de T_5 son (d_1, d_2) -quasigeodésicas. Por (b) y por la construcción de T_5 , se verifica que un extremo de cualquier lado de T_5 tiene un extremo de otro lado a distancia menor o igual que k_1 . Puesto que Y es δ' -hiperbólico, aplicando el Lema 2.10 deducimos que T_5 es δ_5 -thin con $\delta_5 := 4\delta' + k_1 + 2H(\delta', d_1, d_2 + 2k_1)$. Ahora, el Corolario 2.28 permite afirmar que T_4 es δ_4 -thin, con $\delta_4 := d_0\delta_5 + 2k_1 + d_0(2(k_1 + k_5) + (1 + 2k_2)^{-1}k_5)$.

El Lema 2.26 asegura que T_3 es δ_3 -thin con $\delta_3 := \delta_4 + 14k_1 + 16k_6$. Por el Lema 2.21, tenemos que T_1 es δ_1 -thin con $\delta_1 := \max\{\delta_3 + k_1, \delta^*\}$, donde $\delta^* = 3k_1/2 + 4k_6 + 2H(k_6, 2 \max\{1, k_2\}, 4k_1 + 2k_3)$. El Teorema 2.14 es, entonces, una consecuencia del Lema 2.18, y además $\delta := 4(\delta_1 + 16k_6)$, ya que $\delta_1 \geq 2k_6$ (de hecho, $\delta_1 \geq \delta_3 \geq 16k_6$). \square

Demostración de la Proposición 2.15

En primer lugar vamos a probar que la inclusión $i : X_n \longrightarrow X$ es una $(k_7, k_7^{-1}(2k_1 + k_8))$ -quasi-isometría.

Dados $x, y \in X_n$, se tiene que $d_X(x, y) \leq d_{X_n}(x, y)$, puesto que hay más curvas uniendo x e y en X que en X_n . Para probar la otra desigualdad, consideremos una geodésica g en X uniendo x e y . Si $g \subseteq X_n$, entonces $d_X(x, y) = d_{X_n}(x, y)$. En otro caso, para ciertos m, k, i, j , se verifica que:

$$\begin{aligned} d_X(x, y) &\geq d_{X_n}(x, \eta_{nm}^i) + d_X(\eta_{nm}^i, \eta_{nk}^j) + d_{X_n}(y, \eta_{nk}^j) \\ &\geq d_{X_n}(x, \eta_{nm}^i) + k_7^{-1}d_{X_n}(\eta_{nm}^i, \eta_{nk}^j) + d_{X_n}(y, \eta_{nk}^j) - k_8k_7^{-1} \\ &\geq k_7^{-1}(d_{X_n}(x, \eta_{nm}^i) + \text{diam}_{X_n}(\eta_{nm}^i) + d_{X_n}(\eta_{nm}^i, \eta_{nk}^j) + \text{diam}_{X_n}(\eta_{nk}^j) + d_{X_n}(y, \eta_{nk}^j) - 2k_1 - k_8) \\ &\geq k_7^{-1}d_{X_n}(x, y) - k_7^{-1}(2k_1 + k_8). \end{aligned}$$

Por tanto, puesto que X es δ -hiperbólico, X_n es $k_7(4\delta + k_7^{-1}(2k_1 + k_8) + 2H(\delta, k_7, k_7^{-1}(2k_1 + k_8)))$ -thin (ver [16, p.88]). \square

Demostración de la Proposición 2.16

Dados $x, y \in X_n$, se tiene que

$$d_X(x, y) \leq d_{X_n}(x, y) \leq d_X(x, y) + \text{diam}_{X_n}(\cup_{mi} \eta_{nm}^i) \leq d_X(x, y) + k_7.$$

Si denotamos por $(x, y)_w$ y $(x, y)_{w,n}$ los productos de Gromov en X y X_n respectivamente, las últimas desigualdades dan que, para todos $x, y, w \in X_n$

$$(x, y)_{w,n} - k_7 \leq (x, y)_w \leq (x, y)_{w,n} + k_7/2.$$

Entonces, deducimos para todos $x, y, z, w \in X_n$, que

$$\begin{aligned} (x, z)_{w,n} &\geq (x, z)_w - k_7/2 \geq \min\{(x, y)_w, (y, z)_w\} - \delta - k_7/2 \\ &\geq \min\{(x, y)_{w,n} - k_7, (y, z)_{w,n} - k_7\} - \delta - k_7/2 \\ &\geq \min\{(x, y)_{w,n}, (y, z)_{w,n}\} - \delta - 3k_7/2. \end{aligned}$$

Por tanto, X_n es $(\delta + 3k_7/2)$ -hiperbólico. \square

2.3. Demostración de lemas técnicos

Lema 2.29. *Para cada punto z perteneciente a un lado cualquiera de T , denotamos por $A = A(z)$ la unión de los otros dos lados de T . Si la situación es la del Caso 3.4, se tiene que $d_X(z, A) \leq 18k_6$. Si no es así, se dan una de las dos siguientes circunstancias:*

- (1) $d_X(z, A) \leq 12k_6$, o
- (2) existe un punto $z_1 \in T_1$ con $d_X(z, z_1) \leq 8k_6$, y además, z y z_1 están en lados correspondientes.

Además, para cada punto z_1 en un lado cualquiera de T_1 , existe un punto $z \in T$ en su lado correspondiente, con $d_X(z, z_1) \leq 8k_6$.

Por tanto, si T_1 es δ_1 -thin, entonces T es δ_0 -thin, con $\delta_0 := \max\{\delta_1 + 16k_6, 18k_6\}$.

Demostración. Recordemos que si $n \in F_2$, entonces $T_1 \cap X_n = T \cap X_n$. Por tanto, podemos asumir que los vértices de T pertenecen a $\cup_{n \in \Lambda \setminus F_2} X_n$, puesto que, en otro caso, el argumento es más sencillo.

Si $z \notin \eta_a \cup \eta_b \cup \eta_c$, entonces $z \in T_1$ y se tiene (2) con $z_1 = z$. En otro caso, podemos asumir que $z \in \eta_a$. Vamos a considerar a continuación los mismos casos que en la construcción de T_1 en la demostración del Teorema 2.14.

Caso 1. $\eta_a \subseteq X_n$ contiene únicamente un vértice de T . Denotemos por a_1, x'_1, x'_2 los respectivos puntos internos de las geodésicas $[x_1, x_2], [a, x_2], [a, x_1]$ en X_n . Se tiene que $\eta_{a_1} := [x_1, x_2] = [x_1, a_1] \cup [a_1, x_2] \subset T_a$. Puesto que T_a es $4k_6$ -fine en X_n por hipótesis y por el Teorema 1.8, si $z \in [x_1, x'_2]$ entonces existe $z_1 \in [x_1, a_1]$ con $d_X(z_1, z) \leq d_{X_n}(z_1, z) \leq 4k_6$, y si $z \in [x'_1, x_2]$ entonces existe $z_1 \in [a_1, x_2]$ con $d_X(z_1, z) \leq 4k_6$; de esta forma se tiene (2). Si $z \in [a, x'_1]$, podemos tomar $w \in [a, x'_2]$ con $d_X(z, w) \leq 4k_6$; si $z \in [a, x'_2]$, tomamos entonces $w \in [a, x'_1]$ con $d_X(z, w) \leq 4k_6$; en este caso se tiene (1).

Caso 2. Ahora $b \in \eta_a$ y $c \notin \eta_a$.

Caso 2.1. Consideremos la situación $d_{X_n}(x_2, v_1) < d_{X_n}(x_2, u_1)$. Denotamos por u'_1 el punto de $[a, v_3] \subset [a, b]$ con $d_{X_n}(a, u_1) = d_{X_n}(a, u'_1)$.

- (i) Si $z \in [x_1, u_3] \subseteq [x_1, a]$, entonces existe $z_1 \in [x_1, a_1]$ tal que $d_X(z, z_1) \leq 4k_6$.
 - (ii) Si $z \in [u'_1, v_3]$, entonces existe $z_1 \in [a_1, b_1]$ tal que $d_X(z, z_1) \leq 8k_6$, puesto que los triángulos T_a y T_b son $4k_6$ -fine.
 - (iii) Si $z \in [x_2, v_2] \subseteq [x_2, b]$, entonces existe $z_1 \in [b_1, x_2]$ con $d_X(z, z_1) \leq 8k_6$.
- En estos tres casos se tiene (2).
- (iv) Si $z \in [a, u_3]$, entonces existe $w \in [a, u'_1]$ tal que $d_X(z, w) \leq 8k_6$.
 - (v) Si $z \in [a, u'_1]$, entonces existe $w \in [a, u_3]$ tal que $d_X(z, w) \leq 8k_6$.
 - (vi) Si $z \in [b, v_3]$, entonces existe $w \in [b, v_2]$ tal que $d_X(z, w) \leq 4k_6$.
 - (vii) Si $z \in [b, v_2]$, entonces existe $w \in [b, v_3]$ tal que $d_X(z, w) \leq 4k_6$.

En estos cuatro casos se tiene (1).

Caso 2.2. Consideremos la situación $d_{X_n}(x_2, v_1) \geq d_{X_n}(x_2, u_1)$. Recordemos que $a_1 = b_1$. Denotamos por v'_1 el punto de $[a, u_3] \subset [a, x_1]$ con $d_{X_n}(a, v_1) = d_{X_n}(a, v'_1)$ y por u'_1 el punto de $[v_2, x_2] \subset [b, x_2]$ con $d_{X_n}(x_2, u_1) = d_{X_n}(x_2, u'_1)$.

- (i) Si $z \in [x_1, u_3] \subseteq [x_1, a]$, entonces existe $z_1 \in [x_1, a_1]$ tal que $d_X(z, z_1) \leq 4k_6$.

(ii) Si $z \in [x_2, u'_1] \subseteq [x_2, b]$, entonces existe $z_1 \in [b_1, x_2]$ con $d_X(z, z_1) \leq 8k_6$.

En estos dos casos se tiene (2).

(iii) Si $z \in [a, v'_1]$, entonces existe $w \in [a, v_3]$ tal que $d_X(z, w) \leq 8k_6$.

(iv) Si $z \in [a, v_3]$, entonces existe $w \in [a, v'_1]$ tal que $d_X(z, w) \leq 8k_6$.

(v) Si $z \in [b, v_3]$, entonces existe $w \in [b, v_2]$ tal que $d_X(z, w) \leq 4k_6$.

(vi) Si $z \in [b, v_2]$, entonces existe $w \in [b, v_3]$ tal que $d_X(z, w) \leq 4k_6$.

(vii) Si $z \in [u_3, v'_1]$, entonces existe $w \in [v_2, u'_1] \subset [b, u'_1]$ tal que $d_X(z, w) \leq 8k_6$.

(viii) Si $z \in [v_2, u'_1]$, entonces existe $w \in [v'_1, u_3] \subset [a, u_3]$ tal que $d_X(z, w) \leq 8k_6$.

En estos cinco casos se tiene (1).

Caso 3. Ahora $b, c \in \eta_a$.

Caso 3.1. Consideramos la situación $d_{X_n}(x_1, s_3) < d_{X_n}(x_1, u_2)$ y $d_{X_n}(x_2, v_3) < d_{X_n}(x_2, u_1)$. Denotamos por u'_2 el punto de $[b, s_1] \subset [a, b]$ con $d_{X_n}(b, u_2) = d_{X_n}(b, u'_2)$, y por u'_1 el punto de $[b, v_2] \subset [b, c]$ con $d_{X_n}(b, u_1) = d_{X_n}(b, u'_1)$.

(i) Si $z \in [x_1, s_2] \subseteq [x_1, a]$, entonces existe $z_1 \in [x_1, a_1]$ tal que $d_X(z, z_1) \leq 8k_6$, ya que los triángulos T_a y T_b son $4k_6$ -fine.

(ii) Si $z \in [s_1, u'_2]$, entonces existe $z_1 \in [a_1, b_1]$ tal que $d_X(z, z_1) \leq 8k_6$.

(iii) Si $z \in [u'_1, v_2]$, entonces existe $z_1 \in [b_1, c_1]$ tal que $d_X(z, z_1) \leq 8k_6$.

(iv) Si $z \in [x_2, v_1] \subseteq [x_2, c]$, entonces existe $z_1 \in [c_1, x_2]$ con $d_X(z, z_1) \leq 8k_6$.

En estos cuatro casos se tiene (2).

(v) Si $z \in [a, s_2]$, entonces existe $w \in [a, s_1]$ tal que $d_X(z, w) \leq 4k_6$. Obtenemos un resultado similar si $z \in [a, s_1]$.

(vi) Si $z \in [b, u'_2]$, entonces existe $w \in [b, u'_1]$ tal que $d_X(z, w) \leq 12k_6$. Lo mismo ocurre si $z \in [b, u'_1]$.

(vii) Si $z \in [c, v_2]$, entonces existe $w \in [c, v_1]$ tal que $d_X(z, w) \leq 4k_6$. Se concluye de forma análoga si $z \in [c, v_1]$.

En estos tres casos se tiene (1).

Caso 3.2. La situación es: $d_{X_n}(x_1, s_3) \geq d_{X_n}(x_1, u_2)$ y $d_{X_n}(x_2, v_3) < d_{X_n}(x_2, u_1)$. Denotamos por u'_2 el punto de $[x_1, s_2] \subset [x_1, a]$ con $d_{X_n}(x_1, u_2) = d_{X_n}(x_1, u'_2)$, por u'_1 el punto de $[b, v_2] \subset [b, c]$ con $d_{X_n}(b, u_1) = d_{X_n}(b, u'_1)$, y por s'_3 el punto de $[b, v_2] \subset [b, c]$ con $d_{X_n}(b, s_3) = d_{X_n}(b, s'_3)$.

(i) Si $z \in [x_1, u'_2] \subseteq [a, c]$, entonces existe $z_1 \in [x_1, a_1]$ tal que $d_X(z, z_1) \leq 8k_6$.

- (ii) Si $z \in [u'_1, v_2] \subseteq [b, c]$, entonces existe $z_1 \in [b_1, c_1]$ tal que $d_X(z, z_1) \leq 8k_6$.
- (iii) Si $z \in [x_2, v_1] \subseteq [a, c]$, entonces existe $z_1 \in [c_1, x_2]$ con $d_X(z, z_1) \leq 8k_6$.

En estos tres casos se tiene (2).

- (iv) Si $z \in [a, s_2]$, entonces existe $w \in [a, s_1]$ tal que $d_X(z, w) \leq 4k_6$. Tenemos un resultado similar si $z \in [a, s_1]$.
- (v) Si $z \in [b, s_1]$, entonces existe $w \in [b, s'_1]$ tal que $d_X(z, w) \leq 12k_6$. De forma análoga ocurre si $z \in [b, s'_1]$.
- (vi) Si $z \in [c, v_2]$, entonces existe $w \in [c, v_1]$ tal que $d_X(z, w) \leq 4k_6$. Lo mismo pasa si $z \in [c, v_1]$.
- (vii) Si $z \in [u'_2, s_2]$, entonces existe $w \in [u'_1, s'_1]$ tal que $d_X(z, w) \leq 12k_6$. Análogamente para $z \in [u'_1, s'_1]$.

En estos cuatro casos se tiene (1).

Caso 3.3. es similar al 3.2.

Caso 3.4. La situación es: $d_{X_n}(x_1, s_3) \geq d_{X_n}(x_1, u_2)$ y $d_{X_n}(x_2, v_3) \geq d_{X_n}(x_2, u_1)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $d_{X_n}(b, v_3) \geq d_{X_n}(b, s_3)$, puesto que el otro caso es similar. Denotamos por v'_3 el punto de $[b, u_2] \subset [b, x_1]$ con $d_{X_n}(b, v_3) = d_{X_n}(b, v'_3)$, por v''_3 el punto de $[x_1, s_2] \subset [x_1, a]$ con $d_{X_n}(x_1, v'_3) = d_{X_n}(x_1, v''_3)$, y por s'_1 el punto de $[b, v_2] \subseteq [b, c]$ con $d_{X_n}(b, s_1) = d_{X_n}(b, s'_1)$.

- (i) Si $z \in [a, s_2]$, entonces existe $w \in [a, s_1]$ tal que $d_X(z, w) \leq 4k_6$. Tenemos un resultado similar si $z \in [a, s_1]$.
- (ii) Si $z \in [b, s_1]$, entonces existe $w \in [b, s'_1]$ tal que $d_X(z, w) \leq 12k_6$. Análogamente para $z \in [b, s'_1]$.
- (iii) Si $z \in [c, v_2]$, entonces existe $w \in [c, v_1]$ tal que $d_X(z, w) \leq 4k_6$. Lo mismo ocurre si $z \in [c, v_1]$.
- (iv) Si $z \in [v''_3, s_2]$, entonces existe $w \in [v_2, s'_1]$ tal que $d_X(z, w) \leq 12k_6$. La misma situación se da si $z \in [v_2, s'_1]$.
- (v) En otro caso, $z \in [v'_3, v_1] \subseteq [a, c]$. Entonces $L_X([v'_3, v_1]) = d_X(v'_3, v_1) \leq 12k_6$; por tanto $d_X(z, \{v'_3, v_1\}) \leq 6k_6$ y $d_X(z, A) \leq 6k_6 + 12k_6 = 18k_6$.

Con esto terminamos la demostración de la primera parte del lema. Para la segunda parte se puede utilizar una línea de argumentación similar, aunque más sencilla, puesto que no hay dicotomía.

Para terminar, comprobemos que el hecho de que T_1 sea δ_1 -thin en X implica que T es δ_0 -thin en X . Consideremos $z \in T$; si z satisface (1), no queda nada más por probar. En otro caso, existe $z_1 \in T_1$ tal que $d_X(z, z_1) \leq 8k_6$ y z y z_1 están en lados correspondientes. Puesto que T_1 es δ_1 -thin en X , existe $w_1 \in T_1$ con $d_X(z_1, w_1) \leq \delta_1$, de forma que w_1 está en la unión de los otros dos lados. La segunda parte del lema permite afirmar que existe $w \in A$ con $d_X(w_1, w) \leq 8k_6$. Por tanto $d_X(z, A) \leq d_X(z, w) \leq \delta_1 + 16k_6$. \square

Lema 2.30. *Cada lado de T_1 es una $(1, 16k_6)$ -quasigeodésica con su parametrización de longitud de arco. Además, cada componente conexa de $T_1 \cap X_n$ es una geodésica en X_n , si $n \in \Lambda \setminus F_2$.*

Demostración. Podemos asumir que los vértices de T pertenecen a $\cup_{n \in \Lambda \setminus F_2} X_n$, puesto que en otro caso el argumento es más sencillo.

La segunda afirmación es una consecuencia directa de la construcción de T_1 . La primera es una consecuencia del Lema 2.19 y de la construcción de T_1 :

Si $g : J \rightarrow X$ es un lado geodésico de T , el Lema 2.19 dice que es suficiente comprobar que existe un subintervalo $I \subseteq J$ tal que $g_1 : I \rightarrow X$ es la parametrización de longitud de arco para el lado correspondiente a g en T_1 , y que $d_X(g(t), g_1(t)) \leq 8k_6$ para todo $t \in I$.

Para la construcción de T_1 vamos a considerar los mismos casos que en la demostración del Teorema 2.14.

Caso 1. Si $[x_1, x'_2] \subset g$, sustituimos este intervalo por $[x_1, a_1]$ para así conseguir g_1 , y, entonces, $d_X(g(t), g_1(t)) \leq 4k_6$ en estos arcos, ya que T_a es $4k_6$ -fine. El caso $[x_2, x'_1] \subset g$ es similar.

Caso 2. Si $[x_1, u_3] \subset g$, sustituimos este intervalo por $[x_1, a_1]$ para conseguir g_1 , y, entonces, $d_X(g(t), g_1(t)) \leq 4k_6$ en estos arcos. El caso $[x_2, v_2] \subset g$ es similar, con constante $8k_6$, puesto que T_a y T_b son $4k_6$ -fine.

Caso 2.1. Si $g = [a, b]$, entonces $[u'_1, v_3] \subset g$ y $g_1 = [a_1, b_1]$. Tenemos que $d_X(g(t), g_1(t)) \leq 8k_6$ en g_1 .

Caso 2.2. Si $g = [a, b]$, entonces $a_1 = b_1$ y g_1 es simplemente este punto.

Caso 3.1. Si $[x_1, s_2] \subset g$, sustituimos este intervalo por $[x_1, a_1]$ para conseguir g_1 , y entonces $d_X(g(t), g_1(t)) \leq 8k_6$ en estos arcos. El caso $[x_2, v_1] \subset g$ es similar.

Si $g = [a, b]$, entonces $[s_1, u'_2] \subset g$ y $g_1 = [a_1, b_1]$. Se verifica que $d_X(g(t), g_1(t)) \leq 8k_6$ en g_1 . Si $g = [b, c]$, entonces $[u'_1, v_2] \subset g$ y $g_1 = [b_1, c_1]$. En esta situación $d_X(g(t), g_1(t)) \leq 8k_6$ en g_1 .

Caso 3.2. Si $g = [a, c]$, tenemos $[x_1, u'_2] \cup [x_2, v_1] \subset g$, y sustituimos estos intervalos por $[x_1, a_1] \cup [x_2, c_1]$ (respectivamente) para conseguir g_1 ; entonces tenemos que $d_X(g(t), g_1(t)) \leq 8k_6$ en estos arcos.

Si $g = [b, c]$, entonces $[u'_1, v_2] \subset g$ y $g_1 = [b_1, c_1]$. Tenemos $d_X(g(t), g_1(t)) \leq 8k_6$ en g_1 .

Si $g = [a, b]$, entonces $a_1 = b_1$ y g_1 es, simplemente, este punto.

Caso 3.3. es similar a 3.2; no es necesario considerar 3.4 puesto que ahora no tenemos T_1 . \square

Lema 2.31. *Cada lado de T_3 es una $(1 + k_2, k_1 + 16k_6)$ -quasigeodésica con su parametrización de longitud de arco. Es más, cada componente conexa de $T_3 \cap X_n$ es una geodésica en X_n , si $n \in F_1$.*

Demostración. Podemos asumir que los vértices de T pertenecen a $\cup_{n \in F_1} X_n$, puesto que, en otro caso, el argumento es más sencillo.

La segunda afirmación es una consecuencia directa de la construcción de T_3 y del Lema 2.20. Para probar la primera parte, consideremos una parametrización de longitud de arco $g_1 : [0, l] \rightarrow X$ de un lado de T_1 . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $g_1(0) = a_2$ y $g_1(l) = b'_2$. La curva g_1 es una $(1, 16k_6)$ -quasigeodésica por el Lema 2.20. Consideremos ahora una parametrización de longitud de arco $g_3 : [0, l'] \rightarrow X$ del lado de T_3 correspondiente a g_1 . Si $g_3 = g_1$, no hay nada más que probar.

En otro caso, si $s, t \in [0, l']$, existen $s^* \in (t_{i-1}^2, t_i^1]$ y $t^* \in (t_{j-1}^2, t_j^1]$ tales que $s = s^* - \sum_{k=1}^{i-1} (t_k^2 - t_k^1)$, $t = t^* - \sum_{k=1}^{j-1} (t_k^2 - t_k^1)$, $g_3(s) = g_1(s^*)$ y $g_3(t) = g_1(t^*)$. Siempre y cuando $i = j$, se verifica que

$$d_X(g_3(t), g_3(s)) = d_X(g_1(t^*), g_1(s^*)) \leq |t^* - s^*| = |t - s|,$$

$$d_X(g_3(t), g_3(s)) = d_X(g_1(t^*), g_1(s^*)) \geq |t^* - s^*| - 16k_6 = |t - s| - 16k_6.$$

En otro caso, podemos asumir que $i < j$. En esta situación:

$$d_X(g_3(t), g_3(s)) = d_X(g_1(t^*), g_1(s^*)) \leq t^* - s^* = t - s + \sum_{k=i}^{j-1} (t_k^2 - t_k^1),$$

$$d_X(g_3(t), g_3(s)) = d_X(g_1(t^*), g_1(s^*)) \geq t^* - s^* - 16k_6 \geq t - s - 16k_6.$$

Observemos que aplicando (c2) se deduce que $t_{k+1}^1 - t_k^2 \geq k_2^{-1}(t_k^2 - t_k^1)$. Este hecho implica que

$$t - s \geq \sum_{k=i}^{j-2} (t_{k+1}^1 - t_k^2) \geq k_2^{-1} \sum_{k=i}^{j-2} (t_k^2 - t_k^1).$$

De esta desigualdad y (b) obtenemos

$$d_X(g_3(t), g_3(s)) \leq t - s + \sum_{k=i}^{j-2} (t_k^2 - t_k^1) + t_{j-1}^2 - t_{j-1}^1 \leq (1 + k_2)(t - s) + k_1.$$

□

Lema 2.32. *Consideremos dos geodésicas $\gamma_1 : [0, l_1] \rightarrow X$ y $\gamma_2 : [0, l_2] \rightarrow X$ en un espacio X δ -fine, con $d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) \leq c$ y $d(\gamma_1(l_1), \gamma_2(l_2)) \leq c$. Entonces $d(\gamma_1(t), \gamma_2(l_2 t / l_1)) \leq 2\delta + 7c$, para $t \in [0, l_1]$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $l_1 \leq l_2$. Consideramos el cuadrilátero geodésico $Q = \{\gamma_1(0), \gamma_1(l_1), \gamma_2(l_2), \gamma_2(0)\}$ y los triángulos geodésicos $T_1 = \{\gamma_1(0), \gamma_1(l_1), \gamma_2(0)\}$ (con puntos internos $p_1 \in \gamma_1, p_2 \in [\gamma_1(l_1), \gamma_2(0)], p_3 \in [\gamma_1(0), \gamma_2(0)]$) y $T_3 = \{\gamma_1(l_1), \gamma_2(l_2), \gamma_2(0)\}$ (con puntos internos $q_1 \in [\gamma_1(l_1), \gamma_2(0)], q_2 \in \gamma_2, q_3 \in [\gamma_1(l_1), \gamma_2(l_2)]$).

Llamemos q'_1 al punto de γ_1 que verifica $d(\gamma_1(l_1), q'_1) = d(\gamma_1(l_1), q_1) = d(\gamma_1(l_1), q_3) =: v_1$, y p'_2 al punto de γ_2 para el que $d(\gamma_2(0), p'_2) = d(\gamma_2(0), p_2) = d(\gamma_2(0), p_3) =: u_2$. Definimos $u_1 := d(\gamma_1(0), p_1) = d(\gamma_1(0), p_3)$, y $v_2 := d(\gamma_2(l_2), q_2) = d(\gamma_2(l_2), q_3)$. Observemos que $d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) = u_1 + u_2 \leq c$ y $d(\gamma_1(l_1), \gamma_2(l_2)) = v_1 + v_2 \leq c$.

Podemos asumir que $u_1 + v_1 \leq l_1 = L(\gamma_1)$, puesto que el otro caso es más sencillo; este hecho implica $u_2 + v_2 \leq l_2 = L(\gamma_2)$. Puesto que T_1 y T_3 son δ -fine, tenemos que $d(\gamma_1(t + u_1), \gamma_2(t + u_2)) \leq 2\delta$, para todo $t \in [0, l_1 - u_1 - v_1]$.

Observemos que $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq 2\delta + c$, para todo $t \in [0, l_1 - u_1 - v_1]$:

$$\begin{aligned} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) &\leq d(\gamma_1(t), \gamma_1(t + u_1)) + d(\gamma_1(t + u_1), \gamma_2(t + u_2)) + d(\gamma_2(t + u_2), \gamma_2(t)) \\ &\leq u_1 + 2\delta + u_2 \leq 2\delta + c. \end{aligned}$$

Si $t \in [l_1 - u_1 - v_1, l_1]$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) &\leq d(\gamma_1(t), \gamma_1(l_1 - u_1 - v_1)) + d(\gamma_1(l_1 - u_1 - v_1), \gamma_2(l_1 - u_1 - v_1)) \\ &\quad + d(\gamma_2(l_1 - u_1 - v_1), \gamma_2(t)) \\ &\leq u_1 + v_1 + 2\delta + c + u_1 + v_1 \leq 2\delta + 5c. \end{aligned}$$

Es decir, $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq 2\delta + 5c$, para todo $t \in [0, l_1]$.

Si repetimos el mismo argumento con parametrizaciones que inviertan la orientación, obtenemos que $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t + l_2 - l_1)) \leq 2\delta + 5c$, para todo $t \in [0, l_1]$.

Observemos ahora que $t \leq l_2 t / l_1 \leq t + l_2 - l_1$, y $l_2 - l_1 \leq 2c$. Por tanto, tenemos que

$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(l_2 t / l_1)) \leq d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) + d(\gamma_2(t), \gamma_2(l_2 t / l_1)) \leq 2\delta + 5c + l_2 - l_1 \leq 2\delta + 7c.$$

□

Lema 2.33. *Cada lado de T_5 es una (d_1, d_2) -quasigeodésica con su parametrización canónica, donde*

$$d_0 := (1 + k_2)(1 + 2k_2)k_4,$$

$$d_1 := d_0(1 + k_2)(1 + 2k_2) \text{ y}$$

$$d_2 := \max \{ k_1 + (1 + k_2)k_5, k_4(15k_1 + 32k_6) + k_5, d_0^{-1}(17k_1 + 32k_6) + 2(k_1 + k_5) + (1 + 2k_2)^{-1}k_5 \}.$$

Demostración. Sea $g_4 : I \rightarrow X$ un lado cualquiera de T_4 con su parametrización de longitud de arco, y g_5 su lado correspondiente en T_5 con su parametrización canónica.

Dados $s, t \in I$, elijamos una geodésica γ en Y entre $g_5(s)$ y $g_5(t)$.

Por hipótesis, γ interseca a lo sumo un número finito de σ_{nm}^i 's. Asumamos primero que γ no interseca $\cup_{n,m,i} \sigma_{nm}^i$. Entonces $\gamma \subseteq Y_n$, para algún $n \in \Lambda$, y aplicando (c3) y (c4) tenemos que

$$d_Y(g_5(t), g_5(s)) = d_{Y_n}(g_5(t), g_5(s)) \geq k_4^{-1} d_{X_n}(g_4(t), g_4(s)) - k_5 \geq k_4^{-1} d_X(g_4(t), g_4(s)) - k_5.$$

Asumamos ahora que γ interseca $\cup_{n,m,i} \sigma_{nm}^i$. Nuestro objetivo es partir γ en curvas que unan dos conjuntos cerrados σ_{nm}^i y σ_{nk}^j en Y_n , para poderlas relacionar con las geodésicas $\gamma_{mnk}^{ij} \subseteq X_n$ que unen η_{nm}^i con η_{nk}^j que aparecen mencionadas en (c3) para $n \in F_1$; si $n \in F_2$ podemos tomar como γ_{mnk}^{ij} cualquier geodésica uniendo η_{nm}^i con η_{nk}^j . Si $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow Y$, definimos

$$v_1^1 := \min \{ \alpha \leq v \leq \beta : \gamma(v) \in \cup_{n,m,i} \sigma_{nm}^i \}.$$

Está garantizada la existencia de este mínimo porque γ es una función continua en un intervalo compacto y $\gamma \cap (\cup_{n,m,i} \sigma_{nm}^i)$ es un conjunto compacto: cada σ_{nm}^i es un conjunto cerrado y γ interseca a lo sumo un número finito de σ_{nm}^i 's.

Entonces $\gamma(v_1^1) \in \sigma_{n_1 m_1}^{i_1}$, para algún n_1, m_1, i_1 , y definimos

$$v_1^2 := \max \{ \alpha \leq v \leq \beta : \gamma(v) \in \sigma_{n_1 m_1}^{i_1} \}.$$

De forma similar, definimos recursivamente

$$v_j^1 := \min\{v_{j-1}^2 < v \leq \beta : \gamma(v) \in \cup_{n,m,i} \sigma_{nm}^i\};$$

si $\gamma(v_j^1) \in \sigma_{n_j m_j}^{i_j}$, para algún n_j, m_j, i_j , tomamos

$$v_j^2 := \max\{v_{j-1}^2 < v \leq \beta : \gamma(v) \in \sigma_{n_j m_j}^{i_j}\}.$$

Podemos continuar esta elección para $1 \leq j \leq r$. Tenemos que

$$d_Y(g_5(t), g_5(s)) = L_Y(\gamma) = \beta - \alpha \geq v_1^1 - \alpha + \sum_{k=2}^r (v_k^1 - v_{k-1}^2) + \beta - v_r^2.$$

Dados $\sigma_{n_{k-1}m_{k-1}}^{i_{k-1}}$ y $\sigma_{n_k m_k}^{i_k}$, se verifica que $n_{k-1} = n_k$, $n_{k-1} = m_k$, $m_{k-1} = n_k$ o $m_{k-1} = m_k$. Puesto que $\sigma_{nm}^i = \sigma_{mn}^i$, para simplificar la notación podemos asumir que $m_{k-1} = n_k$ y que la curva $f_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k} \circ \gamma_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k}$ que une $\sigma_{n_{k-1}m_{k-1}}^{i_{k-1}}$ con $\sigma_{n_k m_k}^{i_k}$, está contenida en Y_{n_k} . Si $\gamma_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k} : [\alpha_k, \beta_k] \longrightarrow X_{n_k}$ ($k = 2, \dots, r$), aplicando (c3) y (c4) se deduce que

$$\begin{aligned} & k_4^{-1} d_{X_{n_k}}(\gamma_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k}(\beta_k), \gamma_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k}(\alpha_k)) - b_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k} \\ & \leq d_{Y_{n_k}}(f_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k}(\gamma_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k}(\beta_k)), f_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k}(\gamma_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k}(\alpha_k))). \end{aligned}$$

Por (c2),

$$\begin{aligned} & d_{Y_{n_k}}(f_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k}(\gamma_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k}(\beta_k)), f_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k}(\gamma_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k}(\alpha_k))) \\ & \leq \text{diam}_{Y_{n_k}}(\sigma_{n_{k-1}m_{k-1}}^{i_{k-1}}) + d_{Y_{n_k}}(\sigma_{n_{k-1}m_{k-1}}^{i_{k-1}}, \sigma_{n_k m_k}^{i_k}) + \text{diam}_{Y_{n_k}}(\sigma_{n_k m_k}^{i_k}) \\ & \leq (1 + 2k_2) d_{Y_{n_k}}(\sigma_{n_{k-1}m_{k-1}}^{i_{k-1}}, \sigma_{n_k m_k}^{i_k}). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} v_k^1 - v_{k-1}^2 & \geq d_{Y_{n_k}}(\sigma_{n_{k-1}m_{k-1}}^{i_{k-1}}, \sigma_{n_k m_k}^{i_k}) \\ & \geq (1 + 2k_2)^{-1} d_{Y_{n_k}}(f_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k}(\gamma_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k}(\beta_k)), f_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k}(\gamma_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k}(\alpha_k))) \\ & \geq (1 + 2k_2)^{-1} \left(k_4^{-1} d_{X_{n_k}}(\gamma_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k}(\beta_k), \gamma_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k}(\alpha_k)) - b_{n_{k-1}n_k m_k}^{i_{k-1}i_k} \right). \end{aligned}$$

Se verifica que $\gamma([\alpha, v_1^1]) \subseteq Y_{n_1}$ o $\gamma([\alpha, v_1^1]) \subseteq Y_{m_1}$, y $\gamma([v_r^2, \beta]) \subseteq Y_{n_r}$ o $\gamma([v_r^2, \beta]) \subseteq Y_{m_r}$. Para simplificar la notación, podemos asumir que $\gamma([\alpha, v_1^1]) \subseteq Y_{n_1}$ y $\gamma([v_r^2, \beta]) \subseteq Y_{n_r}$. Entonces, la Observación 2.13.[6] permite decir que

$$\begin{aligned} v_1^1 - \alpha & \geq d_{Y_{n_1}}(g_5(s), \sigma_{n_1 m_1}^{i_1}) \geq k_4^{-1} d_{X_{n_1}}(g_4(s), \eta_{n_1 m_1}^{i_1}) - k_1 - k_5, \\ \beta - v_r^2 & \geq d_{Y_{n_r}}(g_5(t), \sigma_{n_r m_r}^{i_r}) \geq k_4^{-1} d_{X_{n_r}}(g_4(t), \eta_{n_r m_r}^{i_r}) - k_1 - k_5. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
d_Y(g_5(t), g_5(s)) &\geq v_1^1 - \alpha + \sum_{k=2}^r (v_k^1 - v_{k-1}^2) + \beta - v_r^2 \\
&\geq k_4^{-1} d_{X_{n_1}}(g_4(s), \eta_{n_1 m_1}^{i_1}) - k_1 - k_5 + k_4^{-1} d_{X_{n_r}}(g_4(t), \eta_{n_r m_r}^{i_r}) - k_1 - k_5 \\
&\quad + (1 + 2k_2)^{-1} \sum_{k=2}^r \left(k_4^{-1} d_{X_{n_k}}(\gamma_{n_{k-1} n_k m_k}^{i_{k-1} i_k}(\beta_k), \gamma_{n_{k-1} n_k m_k}^{i_{k-1} i_k}(\alpha_k)) - b_{n_{k-1} n_k m_k}^{i_{k-1} i_k} \right) \\
&\geq k_4^{-1} d_{X_{n_1}}(g_4(s), \eta_{n_1 m_1}^{i_1}) + k_4^{-1} d_{X_{n_r}}(g_4(t), \eta_{n_r m_r}^{i_r}) - 2(k_1 + k_5) - (1 + 2k_2)^{-1} k_5 \\
&\quad + (1 + 2k_2)^{-1} k_4^{-1} \sum_{k=2}^r d_{X_{n_k}}(\gamma_{n_{k-1} n_k m_k}^{i_{k-1} i_k}(\beta_k), \gamma_{n_{k-1} n_k m_k}^{i_{k-1} i_k}(\alpha_k)).
\end{aligned}$$

Ahora estamos interesados en conseguir una curva continua γ' en X uniendo $g_4(s)$ con $g_4(t)$.

Por (c2) podemos elegir geodésicas γ_k en $X_{n_{k+1}}$ ($2 \leq k \leq r-1$) uniendo $\gamma_{n_{k-1} n_k m_k}^{i_{k-1} i_k}(\beta_k)$ con $\gamma_{n_k n_{k+1} m_{k+1}}^{i_k i_{k+1}}(\alpha_{k+1})$, tales que

$$\begin{aligned}
L_{X_{n_{k+1}}}(\gamma_k) &= d_{X_{n_{k+1}}}(\gamma_{n_k n_{k+1} m_{k+1}}^{i_k i_{k+1}}(\alpha_{k+1}), \gamma_{n_{k-1} n_k m_k}^{i_{k-1} i_k}(\beta_k)) \\
&\leq k_2 d_{X_{n_{k+1}}}(\gamma_{n_k n_{k+1} m_{k+1}}^{i_k i_{k+1}}(\beta_{k+1}), \gamma_{n_k n_{k+1} m_{k+1}}^{i_k i_{k+1}}(\alpha_{k+1})).
\end{aligned}$$

Por (b) podemos elegir una geodésica γ_1 en X_{n_1} uniendo $g_4(s)$ con $\gamma_{n_1 n_2 m_2}^{i_1 i_2}(\alpha_2)$, tal que

$$L_{X_{n_1}}(\gamma_1) = d_{X_{n_1}}(g_4(s), \gamma_{n_1 n_2 m_2}^{i_1 i_2}(\alpha_2)) \leq d_{X_{n_1}}(g_4(s), \eta_{n_1 m_1}^{i_1}) + k_1,$$

y una geodésica γ_r en X_{n_r} uniendo $\gamma_{n_{r-1} n_r m_r}^{i_{r-1} i_r}(\beta_r)$ con $g_4(t)$, tal que $L_{X_{n_r}}(\gamma_r) \leq d_{X_{n_r}}(g_4(t), \eta_{n_r m_r}^{i_r}) + k_1$.

Consideremos ahora la curva continua γ' en X uniendo $g_4(s)$ con $g_4(t)$ obtenida mediante la yuxtaposición de las geodésicas $\{\gamma_k\}_{k=1}^r$ y $\{\gamma_{n_{k-1} n_k m_k}^{i_{k-1} i_k}\}_{k=2}^r$.

Por una parte, de estos hechos se deduce que

$$\begin{aligned}
d_X(g_4(t), g_4(s)) &\leq L_X(\gamma') \leq d_{X_{n_1}}(g_4(s), \eta_{n_1 m_1}^{i_1}) + k_1 + d_{X_{n_r}}(g_4(t), \eta_{n_r m_r}^{i_r}) + k_1 \\
&\quad + (1 + k_2) \sum_{k=2}^r d_{X_{n_k}}(\gamma_{n_{k-1} n_k m_k}^{i_{k-1} i_k}(\beta_k), \gamma_{n_{k-1} n_k m_k}^{i_{k-1} i_k}(\alpha_k)) \\
&\leq 2k_1 + d_0(2(k_1 + k_5) + (1 + 2k_2)^{-1} k_5) + d_0 \left(k_4^{-1} d_{X_{n_1}}(g_4(s), \eta_{n_1 m_1}^{i_1}) \right. \\
&\quad \left. + k_4^{-1} d_{X_{n_r}}(g_4(t), \eta_{n_r m_r}^{i_r}) + (1 + 2k_2)^{-1} k_4^{-1} \sum_{k=2}^r d_{X_{n_k}}(\gamma_{n_{k-1} n_k m_k}^{i_{k-1} i_k}(\beta_k), \gamma_{n_{k-1} n_k m_k}^{i_{k-1} i_k}(\alpha_k)) \right. \\
&\quad \left. - 2(k_1 + k_5) - (1 + 2k_2)^{-1} k_5 \right) \\
&\leq 2k_1 + d_0(2(k_1 + k_5) + (1 + 2k_2)^{-1} k_5) + d_0 d_Y(g_5(t), g_5(s))
\end{aligned}$$

(recordemos que $d_0 := (1 + k_2)(1 + 2k_2)k_4$), con lo que queda probado el Corolario 2.28, ya que hasta ahora no hemos utilizado que $g_4(s)$ y $g_4(t)$ pertenecen al mismo lado de T_4 .

Por otra parte, por el Lema 2.26

$$(1 + k_2)^{-1}(1 + 2k_2)^{-1}|t - s| - 15k_1 - 32k_6 \leq d_X(g_4(t), g_4(s)).$$

Por tanto,

$$d_Y(g_5(t), g_5(s)) \geq d_0^{-1}(1 + k_2)^{-1}(1 + 2k_2)^{-1}|t - s| - d_0^{-1}(17k_1 + 32k_6) - 2(k_1 + k_5) - (1 + 2k_2)^{-1}k_5.$$

Para probar la otra desigualdad, consideremos el dominio I de g_5 y $s, t \in I$, con $s < t$.

Si $g_5([s, t])$ no interseca ningún σ_{nm}^i , entonces $g_5([s, t]) \subseteq h_{mnk}^{ij}$, para ciertos m, n, k, i, j . Estos hechos, junto con (c3) y (c4) permiten deducir que

$$d_Y(g_5(t), g_5(s)) \leq d_{Y_n}(g_5(t), g_5(s)) \leq k_4 d_{X_n}(g_4(t), g_4(s)) + k_5.$$

En otro caso, podemos dividir el intervalo $[s, t]$ en una unión de intervalos $[u_0, u_1] \cup (u_1, u_2] \cup \dots \cup (u_{l-1}, u_l]$, con $l \geq 1$, de forma que $g_5((u_{r-1}, u_r]) \subseteq h_{m_r n_r k_r}^{i_r j_r} \subseteq Y_{n_r}$ ($1 \leq r \leq l$), $u_0 = s$ y $u_l = t$. Así $g_5(u_r)$ es un extremo de $h_{m_r n_r k_r}^{i_r j_r}$; denotamos por $g_5(u_{r-1}+)$ el otro extremo de $h_{m_r n_r k_r}^{i_r j_r}$.

Por (b) y (c2) tenemos que $d_{Y_{n_{r+1}}}(g_5(u_r+), g_5(u_r)) \leq k_2 d_{Y_{n_{r+1}}}(g_5(u_{r+1}), g_5(u_r+))$ ($1 \leq r \leq l-2$), y $d_{Y_{n_l}}(g_5(u_{l-1}+), g_5(u_{l-1})) \leq k_1$. Estos hechos, (c3), (c4) y el Lema 2.26 permiten afirmar que

$$\begin{aligned} d_Y(g_5(t), g_5(s)) &\leq \sum_{r=0}^{l-1} d_{Y_{n_{r+1}}}(g_5(u_{r+1}), g_5(u_r+)) + \sum_{r=1}^{l-2} d_{Y_{n_{r+1}}}(g_5(u_r+), g_5(u_r)) \\ &\quad + d_{Y_{n_l}}(g_5(u_{l-1}+), g_5(u_{l-1})) \\ &\leq k_1 + (1 + k_2) \sum_{r=0}^{l-1} d_{Y_{n_{r+1}}}(g_5(u_{r+1}), g_5(u_r+)) \\ &\leq k_1 + (1 + k_2) \sum_{r=0}^{l-1} (k_4 d_{X_{n_{r+1}}}(g_4(u_{r+1}), g_4(u_r+)) + b_r) \\ &\leq k_1 + (1 + k_2) k_5 + (1 + k_2) k_4 \sum_{r=0}^{l-1} |u_{r+1} - u_r| \\ &\leq (1 + k_2) k_4 |t - s| + k_1 + (1 + k_2) k_5. \end{aligned}$$

Con lo que queda finalmente probado el resultado. \square

Capítulo 3

El papel de punturas y foniles en la hiperbolicidad de las superficies de Riemann

3.1. Introducción

Aunque, como indica el título, en este capítulo nos centraremos sobre todo en estudiar el papel que juegan punturas y foniles (y también finales más generales) en la hiperbolicidad de superficies de Riemann, también abordamos otras cuestiones.

Empezamos obteniendo estimaciones inferiores sobre constantes de hiperbolicidad de espacios métricos generales, que serán de gran utilidad cuando particularicemos los resultados obtenidos para superficies de Riemann.

Igual que en el capítulo anterior, continuamos interesados en obtener información global sobre la hiperbolicidad a partir de información local, pero ahora en el caso concreto de superficies de Riemann. Por esta razón pensamos en identificar algunos finales de una superficie S^* con conjuntos cerrados $\{E_n\}_n$ que se eliminan de una cierta superficie original S , de forma que $S^* = S \setminus \cup_n E_n$.

El Teorema 3.30 permite, en muchos casos, estudiar la hiperbolicidad de una superficie de Riemann en términos de la hiperbolicidad local de sus finales. Además de proporcionar una condición necesaria y suficiente, también determina cuáles son los parámetros de los que depende la constante de hiperbolicidad de S^* .

El Teorema 3.32 proporciona una condición necesaria y suficiente que nos permite, también

en muchos casos, olvidarnos de punturas y foniles a la hora de estudiar la hiperbolicidad de una superficie. Si simplemente estamos interesados en “deshacernos” de las punturas, el Teorema 3.41 da un resultado similar con un enunciado mucho más sencillo.

Para demostrar este último teorema hemos necesitado un resultado universal sobre topología de bolas en superficies de Riemann (ver Teorema 3.9). Este teorema afirma que toda bola de radio menor o igual que $\frac{1}{2} \log 3$ en cualquier superficie de Riemann no excepcional, es necesariamente, simple o doblemente conexa. Se trata de una respuesta concreta en nuestro contexto a la pregunta: *¿en qué casos las restricciones geométricas implican restricciones topológicas?* (Para más información sobre este interesante campo de trabajo, consultar por ejemplo las referencias [12], [17], [18] y [19]).

Todos estos teoremas permiten una notable simplificación en la topología de la superficie a la hora de estudiar la hiperbolicidad, con lo cual el problema se hace mucho más asequible.

El Teorema 3.19 es una herramienta muy importante en la demostración de los teoremas mencionados anteriormente, pero también es interesante por sí mismo. De hecho, garantiza la hiperbolicidad de las superficies de tipo finito con constantes de hiperbolicidad que sólo dependen de la topología de la superficie y de algunas restricciones métricas. Puede entenderse como un resultado sobre hiperbolicidad uniforme y estabilidad de la hiperbolicidad de superficies de Riemann. En este mismo sentido presentamos también el Corolario 3.42.

Por otra parte, los teoremas 3.11, 3.12 y 3.13 son criterios generales que descartan la hiperbolicidad de muchas superficies.

3.2. Resultados en espacios métricos

El resultado que presentamos a continuación será particularmente útil para descartar que un espacio métrico geodésico sea hiperbólico. (Consultar Teoremas 3.12 y 3.13).

Teorema 3.1. *Consideremos un espacio métrico geodésico X , y $X_1, X_2 \subset X$ subespacios cerrados conexos por arcos tales que $X_1 \cup X_2 = X$, $X_1 \cap X_2 = \cup_{i \in A} \eta_i$, con $\#A \geq 2$, η_i conjuntos cerrados y $d_{X_2}(\eta_i, \eta_j) \geq c$ para todos $i, j \in A$, $i \neq j$. Asumamos también que toda curva de longitud finita de X interseca, a lo sumo, un número finito de η_i 's. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un triángulo $(1, \varepsilon)$ -quasigeodésico $T = \{A_0, B_0, C_0\}$ en X y un cierto $x \in A_0$ con $d_X(x, B_0 \cup C_0) \geq c/4 - \varepsilon$.*

Observación 3.2.

1. La condición $d_{X_2}(\eta_i, \eta_j) \geq c$ es mucho menos restrictiva que la de que $d_X(\eta_i, \eta_j) \geq c$, puesto que en la práctica normalmente conocemos $d_{X_2}(\eta_i, \eta_j)$, pero no tenemos ninguna cota inferior de $d_X(\eta_i, \eta_j)$ (se pueden consultar, por ejemplo, los Teoremas 3.13, 3.30 y 3.32, y la Proposición 3.27).
2. Necesitamos que X_1 y X_2 sean conjuntos cerrados simplemente para garantizar que toda curva que una X_1 con X_2 atraviese $X_1 \cap X_2$.

Demostración. Vamos a utilizar un grafo $G := (V, E)$ con vértices $V = \{v_1, v_2\} \cup \{v^i\}_{i \in A}$ y aristas $E = \{[v_1, v^i], [v_2, v^i]\}_{i \in A}$, para modelizar las conexiones entre X_1 y X_2 de la siguiente forma: identificamos X_1, X_2 con los vértices v_1, v_2 , respectivamente, y cada conjunto η_i con una arista v^i , $i \in A$.

Primeramente vamos a construir una aplicación F que verifique que la imagen de toda curva cerrada γ de longitud finita en X , sea una curva cerrada en G . Definimos F de la forma siguiente:

- (1) Si γ es una curva no cerrada que comienza y termina en η_i , con $\gamma \cap (\cup_{j \in A \setminus \{i\}} \eta_j) = \emptyset$, entonces $F(\gamma) := v^i$.
- (2) Si γ es una curva no cerrada que comienza en η_i y termina en η_j ($i \neq j$), γ sólo interseca a $\eta_i \cup \eta_j$ en sus extremos, y $\gamma \cap (\cup_{k \in A \setminus \{i, j\}} \eta_k) = \emptyset$, entonces es obvio que esta curva está contenida en algún X_n ($n = 1, 2$), y, en este caso, definimos $F(\gamma) := [v_n, v^i] \cup [v_n, v^j]$.
- (3) Si γ es una curva cerrada en $X_n \setminus \cup_{i \in A} \eta_i$ ($n = 1, 2$), definimos $F(\gamma) := v_n$. Si γ interseca $\cup_{i \in A} \eta_i$, entonces se puede descomponer de forma única como una unión finita de subcurvas del tipo (1) y/o (2). En este caso, definimos $F(\gamma)$ como la unión de la imagen por F de estas subcurvas (con la orientación adecuada para conseguir que $F(\gamma)$ sea una curva cerrada continua).

Ahora vamos a definir una clase de curvas Γ en X de la forma siguiente: decimos que una curva cerrada $\gamma \in \Gamma$ si y sólo si $F(\gamma)$ no es simplemente conexa en el grafo G .

Observemos que cualquier curva $\gamma \in \Gamma$ satisface $L(\gamma) \geq c$, ya que γ contiene una subcurva que une algún η_i con algún η_j ($i \neq j$) en X_2 : si γ no contiene tal subcurva, entonces $F(\gamma)$ está contenida en $\cup_{i \in A} [v_1, v^i]$, que es un subconjunto simplemente conexo de G .

Para cada $\varepsilon > 0$, elegimos una curva $\gamma_\varepsilon \in \Gamma$ con $L(\gamma_\varepsilon) < \inf_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma) + \varepsilon$. Queremos probar que toda subcurva γ_0 de γ_ε con $L(\gamma_0) \leq L(\gamma_\varepsilon)/2$ es una $(1, \varepsilon)$ -quasigeodésica.

Para conseguirlo, vamos a considerar dos puntos $p, q \in \gamma_\varepsilon$ y una geodésica g en X uniéndolos. Ya que γ_ε es una curva cerrada, podemos partirla en otras dos curvas γ', γ'' uniendo p y q , con $\gamma' \cup \gamma'' = \gamma_\varepsilon$. A continuación vamos a probar que $L(g) > \min\{L(\gamma'), L(\gamma'')\} - \varepsilon$. Argumentando por contradicción, supongamos que $L(g) \leq \min\{L(\gamma'), L(\gamma'')\} - \varepsilon$. Entonces $L(g \cup \gamma'), L(g \cup \gamma'') \leq L(\gamma_\varepsilon) - \varepsilon < \inf_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma)$.

Afirmación. Afirmamos que al menos una de las curvas cerradas $g \cup \gamma', g \cup \gamma''$ pertenece a Γ .

Asumiendo, por el momento, que esta afirmación es cierta, obtenemos la contradicción que buscábamos, puesto que tenemos una curva de Γ de longitud menor que $\inf_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma)$.

Consideremos la parametrización de longitud de arco $\gamma_0 : [0, l] \rightarrow X$ de una subcurva de γ_ε con $l = L(\gamma_0) \leq L(\gamma_\varepsilon)/2$. Por definición de parametrización de longitud de arco, tenemos que $d_X(\gamma_0(t), \gamma_0(s)) \leq L(\gamma_0([s, t])) = |t - s|$. Ya que $l \leq L(\gamma_\varepsilon)/2$, hemos probado que si g es una geodésica en X uniendo $\gamma_0(s)$ y $\gamma_0(t)$, entonces $d_X(\gamma_0(t), \gamma_0(s)) = L(g) > L(\gamma_0([s, t])) - \varepsilon = |t - s| - \varepsilon$. Estas desigualdades nos dicen que γ_0 es una $(1, \varepsilon)$ -quasigeodésica.

Elijamos ahora dos puntos $p_0, q_0 \in \gamma_\varepsilon$ tales que podamos dividir γ_ε en dos curvas distintas γ', γ'' uniendo p_0 y q_0 , con $\gamma' \cup \gamma'' = \gamma_\varepsilon$ y $L(\gamma') = L(\gamma'') = L(\gamma_\varepsilon)/2$. Consecuentemente, γ' y γ'' son $(1, \varepsilon)$ -quasigeodésicas en X , y $\{\gamma', \gamma''\}$ es un triángulo $(1, \varepsilon)$ -quasigeodésico en X (la definición de triángulo admite que dos vértices coincidan).

Consideremos el punto $x \in \gamma'$ que divide γ' en dos curvas de igual longitud $L(\gamma_\varepsilon)/4$. Tenemos que $d_X(x, \gamma'') \geq L(\gamma_\varepsilon)/4 - \varepsilon \geq c/4 - \varepsilon$.

Vamos a probar ahora la afirmación. Argumentando por contradicción, si ninguna de las curvas está en Γ , entonces $F(g \cup \gamma'), F(g \cup \gamma'')$ son triviales en el grafo G ; por tanto $F(g \cup \gamma') \cup F(g \cup \gamma'')$ también es trivial. Podemos construir una homotopía en X , que demuestre que $[g \cup \gamma'] * [g \cup \gamma''] = [\gamma' \cup \gamma''] = [\gamma_\varepsilon]$ (una posible homotopía es una deformación, a un único punto, de las dos curvas que tienen g como grafo asociado). De forma similar podemos construir una homotopía en G , que pruebe que $[F(g \cup \gamma')] * [F(g \cup \gamma'')] = [F(\gamma' \cup \gamma'')] = [F(\gamma_\varepsilon)]$ (aunque la imagen por F de la homotopía en X no es la homotopía en G). Esto es una contradicción, porque $F(\gamma_\varepsilon)$ es trivial en G pero $\gamma_\varepsilon \in \Gamma$. \square

El teorema anterior, junto con el Lema 2.10 dan, directamente, el siguiente resultado:

Teorema 3.3. *Consideremos un espacio métrico geodésico X , y $X_1^n, X_2^n \subset X$ subespacios cerrados conexos por arcos, tales que $X_1^n \cup X_2^n = X$, $X_1^n \cap X_2^n = \cup_{i \in A^n} \eta_i^n$, con $\#A^n \geq 2$, η_i^n conjuntos cerrados y $d_{X_2^n}(\eta_i^n, \eta_j^n) \geq c_n$ para todos $i, j \in A^n$, $i \neq j$. Asumamos también que para cada n fijo, toda curva de X con longitud finita interseca, a lo sumo, un número finito de η_i^n 's. Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, entonces X no es hiperbólico.*

El siguiente hecho elemental es una consecuencia directa del teorema anterior:

Corolario 3.4. *Consideremos un grafo G que es un espacio métrico geodésico, con una sucesión de aristas $\{e_n\}_n$ tal que el grafo $G \setminus e_n$ es conexo para todo n , y $\lim_{n \rightarrow \infty} L(e_n) = \infty$. Entonces G no es hiperbólico.*

Para probar la Proposición 3.27 y los teoremas 3.30 y 3.32, vamos a necesitar un resultado similar al Teorema 3.1, que permita descomponer el espacio X en más de dos subespacios, y sustituir la condición “ $d_{X_2}(\eta_i, \eta_j) \geq c$ para todos $i, j \in A$, $i \neq j$ ”, por “ $d_{X_2}(\eta_i, \eta_j) \geq c$ para algún $i, j \in A$ ”; sin embargo, a cambio de esta generalización, deberemos pagar con hipótesis adicionales.

A continuación, enunciaremos un hecho elemental.

Lema 3.5. *Sea X un espacio métrico geodésico, γ una geodésica en X y S un subconjunto de X . Asumamos que existe una geodésica η uniendo γ con S , tal que $L(\eta) = d(\gamma, S)$, cuyos extremos son $x_1 \in \gamma$ y $x_2 \in S$. Elijamos dos puntos arbitrarios, $x_3 \in S$, $x_4 \in \gamma$, y denotemos por $A := d(x_1, x_4)$, $B := d(x_2, x_3)$ y $C := d(x_3, x_4)$. Entonces, $A \leq B + 2C$.*

Demostración. Definimos $D := L(\eta) = d(x_1, x_2) = d(\gamma, S)$. Observemos que la condición $D = d(\gamma, S)$ implica que $D \leq C$. Por la desigualdad triangular es evidente que $A \leq B + C + D \leq B + 2C$. \square

A continuación vamos a enunciar el resultado más importante de esta sección. Resultará esencial en la demostración de la Proposición 3.27 y de los teoremas 3.30 y 3.32.

Teorema 3.6. *Sea X un espacio métrico geodésico, y X_1, X_2, X_3 subconjuntos cerrados de X , con X_1, X_2 conexos por arcos, $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X$, $X_1 \cap X_2 = \cup_{i=1}^r \eta_i$ ($r \geq 2$), $X_2 \cap X_3 = \cup_{i=r+1}^k \eta_i$,*

y $X_1 \cap X_3 = \emptyset$, donde η_i 's son conjuntos cerrados. Asumamos que existen dos constantes positivas, c_1, c_2 , tales que $\text{diam}_{X_1}(\eta_i) \leq c_1$ para todo $1 \leq i \leq r$, $\text{diam}_{X_2}(\eta_i) \leq c_1$ para todo $1 \leq i \leq k$, y $d_{X_2}(\eta_i, \eta_j) \geq c_2$ para algunos $1 \leq i, j \leq r$. Si X es δ -thin, entonces $c_2 \leq 8(k-1)(c_1/2 + (2k+2r-6)\delta + 2H(4\delta, 2, c_1/2))$, donde H es la constante del Teorema 1.15.

Observación 3.7.

1. Se permite que $X_3 = \emptyset$.
2. La hipótesis $X_1 \cap X_3 = \emptyset$ no es restrictiva en absoluto, puesto que si algunas componentes conexas de X_3 intersecan X_1 , podemos considerar estas componentes como parte de X_1 .
3. Puesto que no exigimos que X_3 sea conexo, la conclusión del Teorema 3.6 sigue siendo cierta si consideramos $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$, con $X_2 \cap (X_3 \cup \dots \cup X_n) = \bigcup_{i=r+1}^k \eta_i$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que X_1 y X_2 son espacios geodésicos, ya que si no fuera así, siempre que necesitáramos una geodésica uniendo $x, y \in X_i$, podríamos tomar una curva γ_ε uniéndolos con $L(\gamma_\varepsilon) < d_{X_i}(x, y) + \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$ (de forma similar a como hacemos en la demostración del Teorema 3.1). Puesto que en la demostración sólo utilizamos un número finito de geodésicas, la prueba sigue siendo correcta teniendo en cuenta ε cuando sea necesario; después, es suficiente con hacer $\varepsilon \rightarrow 0$, puesto que la dependencia en ε de las constantes involucradas es continua. Análogamente, se puede asumir que existe una geodésica de longitud mínima en X_2 entre η_i y η_j , para i, j con $d_{X_2}(\eta_i, \eta_j) \geq c_2$.

Asumamos que existe un polígono $(2, c_1/2)$ -quasigeodésico, de a lo sumo $2k + 2r - 4$ lados, que es δ_0 -thin siendo δ_0 la mejor constante, y $\delta_0 \geq \frac{c_2}{8(k-1)} - \frac{c_1}{2}$. Puesto que el espacio X es δ -thin, es 4δ -hiperbólico por el Teorema 1.8; se puede deducir fácilmente que un polígono $(2, c_1/2)$ -quasigeodésico de a lo sumo $2k + 2r - 4$ lados, es δ_1 -thin, con $\delta_1 = (2k + 2r - 6)\delta + 2H(4\delta, 2, c_1/2)$, donde H es la constante del Teorema 1.15. Por tanto, $\delta_1 \geq \delta_0 \geq \frac{c_2}{8(k-1)} - \frac{c_1}{2}$. Entonces,

$$c_2 \leq 8(k-1)(c_1/2 + (2k+2r-6)\delta + 2H(4\delta, 2, c_1/2)).$$

A continuación vamos a construir el polígono quasigeodésico del que hemos hablado: sin pérdida de generalidad podemos asumir que η_1, η_r son los conjuntos tales que $d_{X_2}(\eta_1, \eta_r) \geq d_{X_2}(\eta_i, \eta_j)$, para todos $1 \leq i, j \leq r$.

Denotemos por γ_2 una geodésica en X_2 uniendo η_1 con η_r , tal que $L(\gamma_2) = d_{X_2}(\eta_1, \eta_r) \geq c_2$; asumamos que γ_2 comienza en $a \in \eta_1$ y termina en $b \in \eta_r$. Denotamos por γ_1 una geodésica en X_1 uniendo a y b . Por tanto, $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2$ es una curva cerrada en X .

Nuestro objetivo es construir un polígono quasigeodésico contenido en γ , siendo a y b dos de sus vértices. Elegiremos el resto de los vértices en dos pasos consecutivos.

Primer paso. Llamemos σ_i^1 a una geodésica de longitud mínima en X_1 entre η_i y γ_1 , con $2 \leq i \leq r-1$ (siempre existe tal geodésica porque η_i es cerrado y γ_1 es compacto, y X_1 es un espacio geodésico), y σ_i^2 a una geodésica de longitud mínima en X_2 entre η_i y γ_2 , con $2 \leq i \leq k$ y $i \neq r$. Definimos $x_i^j := \sigma_i^j \cap \eta_i$ e $y_i^j := \sigma_i^j \cap \gamma_j$ para todo $2 \leq i \leq r-1$ si $j = 1$, y para todo $2 \leq i \leq k, i \neq r$ si $j = 2$.

Tomamos como vértice el punto y_i^j para todo $2 \leq i \leq r-1$ si $j = 1$, y para todo $2 \leq i \leq k, i \neq r$ si $j = 2$ (podemos definir $y_1^j := \sigma_1^j := a$ e $y_r^j := \sigma_r^j := b$).

Segundo paso. Entre cada dos vértices consecutivos de los definidos en el paso anterior, añadimos como nuevo vértice su punto medio en γ .

Ahora vamos a probar que este polígono, de a lo sumo $2k + 2r - 4$ lados es $(2, c_1/2)$ -quasigeodésico: Sean α, β puntos del mismo lado L_1 del polígono. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $L_1 \subset X_2$, puesto que el otro caso es similar. Observemos que, por construcción del polígono, hay un lado adyacente, $L_2 \subset X_2$, tal que $L(L_2) = L(L_1) =: l$ y $L_1 \cap L_2$ es uno de los vértices elegidos en el segundo paso. Sea g una geodésica en X , uniendo α y β tal que $g(0) = \alpha$, $g(T) = \beta$.

Es obvio que $T := d_X(\alpha, \beta) \leq d_{X_2}(\alpha, \beta)$.

Probemos ahora la otra desigualdad. Supongamos que g interseca $\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \dots, \eta_{i_s}$, en este orden. Entonces podemos definir $t_0 := \max\{t \in [0, T] : g(t) \in \eta_{i_s}\}$, ya que η_{i_s} es un conjunto cerrado.

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $d_{X_2}(\beta, L_2) = \min\{d_{X_2}(\alpha, L_2), d_{X_2}(\beta, L_2)\}$; definimos $\beta' := g(t_0) \in \eta_{i_s}$. Evidentemente, $d_{X_2}(\alpha, \beta) \leq d_{X_2}(\beta, y_{i_s}^2)$, puesto que no es posible que $y_{i_s}^2 = L_1 \cap L_2$ (recordemos que $L_1 \cap L_2$ es uno de los vértices elegidos en el segundo paso).

Construimos el cuadrilátero en X_2 de vértices $\beta, y_{i_s}^2, x_{i_s}^2$ y β' , y lados $g|_{[\beta, \beta']}, \gamma_2|_{[\beta, y_{i_s}^2]}, \sigma_{i_s}^2$ y $[\beta', x_{i_s}^2]$ (una geodésica en X_2). Aplicando el Lema 3.5, donde $A := d_{X_2}(\beta, y_{i_s}^2), B := d_{X_2}(\beta', x_{i_s}^2)$, y $C := d_{X_2}(\beta, \beta') = d_X(\beta, \beta') \leq d_X(\alpha, \beta)$, tenemos que:

$$d_{X_2}(\alpha, \beta) \leq d_{X_2}(\beta, y_{i_s}^2) = A \leq B + 2C \leq 2d_X(\alpha, \beta) + c_1.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2} d_{X_2}(\alpha, \beta) - \frac{c_1}{2} \leq d_X(\alpha, \beta) \leq d_{X_2}(\alpha, \beta),$$

y así hemos probado que nuestro polígono es $(2, c_1/2)$ -quasigeodésico. Veamos ahora que es δ_0 -thin, siendo δ_0 la mejor constante, y $\delta_0 \geq \frac{c_2}{8(k-1)} - \frac{c_1}{2}$.

Puesto que, a lo sumo, $2k - 2$ lados del polígono están en X_2 , existen, como mínimo, dos lados adyacentes en X_2 cuya longitud es mayor o igual que $c_2/(2k - 2)$. Elijamos uno de ellos, y llamemos a sus vértices v_1 y v_2 . Sea p el punto medio entre ellos en γ_2 , y S la unión de los restantes lados del polígono. Nuestro propósito ahora es estimar $d_X(p, S)$.

Sea g una geodésica en X tal que $L(g) = d_X(p, S)$. Hay dos posibilidades:

- (1) Si g está contenida en X_2 , entonces $d_X(p, S) = d_{X_2}(p, S) = d_{X_2}(p, \{v_1, v_2\}) \geq \frac{c_2}{4(k-1)}$.
- (2) Si g no está contenida en X_2 , la primera vez que g sale de X_2 lo hace atravesando algún η_i , $1 \leq i \leq k$, en un cierto punto q . Observemos que no es posible que $i \in \{1, r\}$, puesto que γ_2 es una geodésica minimizante entre η_1 y η_r . Definamos un cuadrilátero de vértices p, q, x_i^2, y_i^2 (donde x_i^2 y y_i^2 son los extremos de σ_i^2 , definidos al comienzo de la prueba). Los lados de este polígono son $\gamma_2|_{[p, y_i^2]}$, σ_i^2 , $g|_{[p, q]}$ y $[x_i^2, q]$ (una geodésica en X_2). Aplicando el Lema 3.5, tomando $A := d_{X_2}(p, y_i^2)$, $B := d_{X_2}(x_i^2, q)$ y $C := d_{X_2}(p, q) = d_X(p, q) \leq d_X(p, S)$, deducimos que

$$\frac{c_2}{4(k-1)} \leq d_{X_2}(p, \{v_1, v_2\}) \leq d_{X_2}(p, y_i^2) = A \leq B + 2C \leq 2d_X(p, S) + c_1.$$

Por tanto,

$$\delta_0 \geq d_X(p, S) \geq \frac{c_2}{8(k-1)} - \frac{c_1}{2}.$$

□

El Teorema 3.6 y el Lema 2.10 permiten deducir el siguiente resultado:

Teorema 3.8. *Sea X un espacio métrico geodésico, y X_1^n, X_2^n, X_3^n subconjuntos cerrados de X , con X_1^n, X_2^n conexos por arcos, $X_1^n \cup X_2^n \cup X_3^n = X$, $X_1^n \cap X_2^n = \cup_{i=1}^{r_n} \eta_i^n$ ($r_n \geq 2$), $X_2^n \cap X_3^n = \cup_{i=r_n+1}^{k_n} \eta_i^n$, y $X_1^n \cap X_3^n = \emptyset$, donde η_i^n 's son conjuntos cerrados. Asumamos que existen constantes positivas, c_1, c_2^n , tales que $\text{diam}_{X_1^n}(\eta_i^n) \leq c_1$ para todo $1 \leq i \leq r_n$, $\text{diam}_{X_2^n}(\eta_i^n) \leq c_1$ para todo $1 \leq i \leq k_n$, y $d_{X_2^n}(\eta_i^n, \eta_j^n) \geq c_2^n$ para algunos $1 \leq i, j \leq r_n$. Si $k_n \leq k$ y $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_2^n = \infty$, entonces X no es hiperbólico.*

3.3. Resultados en superficies de Riemann

En principio, la curvatura negativa podría hacernos pensar que todas las superficies de Riemann son hiperbólicas. De hecho, esto es lo que ocurre cuando no hay “obstáculos topológicos” (como por ejemplo en el disco de Poincaré \mathbb{D}) o cuando hay una cantidad finita de ellos (ver teoremas 3.14 y 3.19 más adelante). Sin embargo, cuando hay una cantidad infinita, como ocurre por ejemplo en el caso del “two-dimensional jungle gym” (un \mathbb{Z}^2 -cubrimiento de un toro de género dos), la hiperbolicidad puede fallar.

Los resultados de esta sección son útiles tanto porque proporcionan ejemplos interesantes de superficies de Riemann hiperbólicas, como porque establecen criterios que permiten decidir si una superficie de Riemann es o no hiperbólica.

Aunque el resultado que presentamos a continuación es una herramienta crucial en la demostración del Teorema 3.41, también resulta interesante por sí mismo. Proporciona constantes universales que no dependen de la superficie S ni del punto $p \in S$ elegido, de forma similar a lo que ocurre con el Lema del Collar.

Teorema 3.9. *Consideremos una superficie de Riemann abierta no excepcional S y $p \in S$. Si en $B_S(p, r)$ hay una curva cerrada libremente homótopa a una puntura o a una geodésica simple cerrada γ y $r \leq \frac{1}{2} \log 3$, entonces $\overline{B_S(p, r)}$ está contenida en el collar de γ . Por tanto, $\overline{B_S(p, r)}$ es simple o doblemente conexa, y $\partial B_S(p, r)$ tiene, a lo sumo, dos componentes conexas.*

Demostración. Supongamos que la bola $B_S(p, r)$ contiene una curva simple cerrada libremente homótopa a una puntura γ , con $r \leq \frac{1}{2} \log 3$. y consideremos una aplicación recubridora $\pi : \mathbb{U} \rightarrow S$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\pi(\{0 \leq \Re z < 1, \Im z > 1/2\})$ es el 2-collar de γ , y que $\pi(it) = \pi(1 + it) = p$, para algún $t > 0$. Hay una curva geodésica (excepto en el punto p) γ_1 libremente homótopa a γ , comenzando y terminando en p , de longitud menor que $2r$. Elevamos γ_1 a \mathbb{U} , consiguiendo una curva γ_2 que comienza en it y termina en $1 + it$. Por (1.6) (ver página 13), se tiene que

$$\sinh^2 r > \sinh^2 \frac{L_S(\gamma_1)}{2} = \sinh^2 \frac{d_{\mathbb{U}}(it, 1 + it)}{2} = \frac{1}{4t^2}, \quad t > \frac{1}{2 \sinh r}.$$

Puesto que $r \leq \frac{1}{2} \log 3$, tenemos que $te^{-r} > e^{-r}/(2 \sinh r) = 1/(e^{2r} - 1) \geq 1/2$. Entonces (ver p.e. [21, p. 277]), se verifica que $\overline{B_{\mathbb{U}}(it, r)} = \{(\Re z)^2 + (\Im z - t \cosh r)^2 \leq t^2 \sinh^2 r\} \subset \{\Im z \geq te^{-r}\} \subset \{\Im z > 1/2\}$.

Por tanto, $\overline{B_S(p, r)} \subset C_S(q, 2)$, y este hecho implica que $\overline{B_S(p, r)}$ es doblemente conexa y $\partial B_S(p, r)$ es la unión de dos curvas simples cerradas.

Supongamos ahora que la bola $B_S(p, r)$ contiene una curva simple cerrada libremente homótopa a una geodésica simple cerrada γ , de longitud $L_S(\gamma) = 2l$. Consideremos una aplicación recubridora universal $\pi : \mathbb{U} \longrightarrow S$ con $\pi(\{\Re z = 0\}) = \gamma$. Entonces $\pi(\{\rho e^{i\phi} : 1 \leq \rho < e^{2l}, |\phi - \pi/2| < \operatorname{arcsec}(\cosh d)\})$ es el collar de γ de anchura $d \leq d_0$, si $\cosh d_0 = \coth l$ (por el Lema del Collar). Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\pi(i e^{-i\theta}) = \pi(i e^{2l-i\theta}) = p$, para algún $0 < \theta < \pi/2$. Hay una curva geodésica (excepto en el punto p) γ_3 , libremente homótopa a γ , comenzando y terminando en p , con $2l \leq L_S(\gamma_3) < 2r$. Elevamos ahora γ_3 a \mathbb{U} consiguiendo una curva γ_4 que comienza en $i e^{-i\theta}$ y termina en $i e^{2l-i\theta}$. Por (1.6) (ver página 13), se tiene que

$$\sinh^2 r > \sinh^2 \frac{L_S(\gamma_3)}{2} = \sinh^2 \frac{d_{\mathbb{U}}(i e^{-i\theta}, i e^{2l-i\theta})}{2}, \quad \sinh r > \frac{e^{2l} - 1}{2 e^l \cos \theta} = \sinh l \sec \theta.$$

Si definimos $s := d_S(p, \gamma) = d_{\mathbb{U}}(i, i e^{-i\theta})$, entonces $\cosh s = \sec \theta$ y $\sinh r > \sinh l \cosh s$.

Vamos a probar ahora que $s + r < d_0$; si esto es cierto, $\overline{B_S(p, r)}$ está contenida en el collar de γ de anchura d_0 , y tal hecho implica que $\overline{B_S(p, r)}$ es doblemente conexa y $\partial B_S(p, r)$ es la unión de dos curvas simples cerradas; con esto concluiremos la prueba del teorema. Observemos que la función $f(l) := (2 + \cosh l)/(2 - \cosh l)$ es creciente en $l \in [0, \frac{1}{2} \log 3]$, ya que $\cosh l \leq \cosh(\frac{1}{2} \log 3) = 1/\sqrt{3} < 2$; entonces $f(l) \geq f(0) = 3 \geq e^{2r}$ para $l < r \leq \frac{1}{2} \log 3$. Por tanto, puesto que $l < r \leq \frac{1}{2} \log 3$, se verifica que

$$e^{2r} \leq \frac{2 + \cosh l}{2 - \cosh l} = \frac{(2 + \cosh l)(1 + \cosh l)}{(2 - \cosh l)(1 + \cosh l)} = \frac{2 + 3 \cosh l + \cosh^2 l}{2 + \cosh l - \cosh^2 l},$$

y entonces $e^{2r}(\sinh^2 l - \cosh l - 1) + 2 + 3 \cosh l + \cosh^2 l \geq 0$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} e^{2r} \sinh^2 r - e^{2r} \sinh^2 l &\leq \cosh^2 l + 2 \cosh l - (e^{2r} - 1) \cosh l + 1 + e^{2r} \sinh^2 r - (e^{2r} - 1) \\ e^{2r} \sinh^2 r - e^{2r} \sinh^2 l &\leq \cosh^2 l + 2(1 - e^r \sinh r) \cosh l + 1 + e^{2r} \sinh^2 r - 2 e^r \sinh r \\ e^{2r}(\sinh^2 r - \sinh^2 l) &\leq (\cosh l + 1 - e^r \sinh r)^2 \\ e^r \sqrt{\sinh^2 r - \sinh^2 l} &\leq \cosh l + 1 - e^r \sinh r, \end{aligned}$$

ya que $\cosh l + 1 > e^r \sinh r$ (de hecho, $r \leq \frac{1}{2} \log 3$ permite deducir que $e^{2r} - 1 \leq 2 < 2 \cosh l + 2$).

Entonces

$$\begin{aligned}
 e^r &\leq \frac{\cosh l + 1}{\sinh r + \sqrt{\sinh^2 r - \sinh^2 l}}, \\
 r &\leq \log \frac{\cosh l + 1}{\sinh r + \sqrt{\sinh^2 r - \sinh^2 l}} = \log \frac{\frac{\cosh l}{\sinh l} + \sqrt{\frac{\cosh^2 l}{\sinh^2 l} - 1}}{\frac{\sinh r}{\sinh l} + \sqrt{\frac{\sinh^2 r}{\sinh^2 l} - 1}} \\
 &= \operatorname{arccosh} \frac{\cosh l}{\sinh l} - \operatorname{arccosh} \frac{\sinh r}{\sinh l} = d_0 - \operatorname{arccosh} \frac{\sinh r}{\sinh l}.
 \end{aligned}$$

Por tanto, ya que $\sinh r > \sinh l \cosh s$, se tiene que

$$s + r \leq d_0 + s - \operatorname{arccosh} \frac{\sinh r}{\sinh l} < d_0.$$

Entonces, $\overline{B_S(p, r)}$ está contenida en el collar de γ . □

Definición 3.10. Sea c una constante positiva. Decimos que una superficie de Riemann no excepcional S (con o sin frontera) tiene género c -amplio si toda curva simple cerrada homotópicamente no trivial $\gamma \subset S$ tal que $S \setminus \gamma$ es conexa, verifica $L_S(\gamma) \geq c$.

Decimos que S tiene género estrecho si no existe $c > 0$ tal que S tiene género c -amplio.

Observemos que si S es abierta, tiene género c -amplio si y sólo si toda geodésica simple cerrada $\gamma \subset S$ tal que $S \setminus \gamma$ es conexa, verifica $L_S(\gamma) \geq c$.

Obviamente, todo dominio plano tiene género c -amplio para todo c , y toda superficie de Riemann con género finito tiene género c -amplio para algún c .

Veamos a continuación unos cuantos criterios generales que permiten descartar la hiperbolicidad de muchas superficies.

Teorema 3.11. Toda superficie de Riemann no excepcional (con o sin frontera) con género estrecho no es hiperbólica.

Demostración. Consideremos una superficie de Riemann abierta no excepcional S con género estrecho. Elegimos una sucesión de geodésicas simples cerradas $\{\gamma_n\}_n$ en S con $S \setminus \gamma_n$ conexa y $\lim_{n \rightarrow \infty} L_S(\gamma_n) = 0$.

El Lema del Collar (ver [31]) dice que para cada γ_n existe un collar de anchura d , para todo $0 < d \leq d_n$, donde $\cosh d_n = \coth(L_S(\gamma_n)/2)$.

Definimos las superficies de Riemann con borde S_2^n como el collar de γ_n de anchura $d_n/2$, y $S_1^n := \overline{S \setminus S_2^n}$, que es conexa, puesto que $S \setminus \gamma_n$ es conexa. Se tiene que $\partial S_1^n = \partial S_2^n = S_1^n \cap S_2^n = \eta_1^n \cup \eta_2^n$, con

$$L_S(\eta_i^n) = L_S(\gamma_n) \cosh(d_n/2) = L_S(\gamma_n) \sqrt{\frac{\cosh d_n + 1}{2}} = L_S(\gamma_n) \sqrt{\frac{\coth(L_S(\gamma_n)/2) + 1}{2}}.$$

Puesto que S_2^n es el collar de γ_n de anchura $d_n/2$, se verifica que $d_S(\eta_1^n, \eta_2^n) = d_{S_2^n}(\eta_1^n, \eta_2^n) = d_n$. Por el Teorema 3.1, si S es δ -thin, entonces $\delta \geq d_n/2 - L_S(\eta_i^n)/2$. Puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} L_S(\eta_i^n) = 0$, no es posible que S sea hiperbólica.

Si S tiene frontera, está contenida en una superficie de Riemann abierta no excepcional R . Elegimos curvas simples cerradas $\{g_n\}_n$ en S con $S \setminus g_n$ conexa y $\lim_{n \rightarrow \infty} L_S(g_n) = 0$. Consideremos la geodésica simple cerrada γ_n en R libremente homótopa a g_n ; se verifica que $R \setminus \gamma_n$ es conexa y $\lim_{n \rightarrow \infty} L_R(\gamma_n) = 0$. Cada geodésica γ_n tiene en R un collar de anchura d , para todo $0 < d \leq d_n$, con $\cosh d_n = \coth(L_S(\gamma_n)/2)$.

Definimos las superficies de Riemann con borde R_2^n como el collar de γ_n en R de anchura $d_n/2$, S_2^n como una componente conexa de $S \cap R_2^n$ tal que $S \setminus S_2^n$ es conexa, y $S_1^n := \overline{S \setminus S_2^n}$. Se tiene que $\partial S_1^n = \partial S_2^n = S_1^n \cap S_2^n = \eta_1^n \cup \eta_2^n$, con $L_S(\eta_i^n) \leq L_R(\gamma_n) \sqrt{(\coth(L_R(\gamma_n)/2) + 1)/2}$, y $d_{S_2^n}(\eta_1^n, \eta_2^n) \geq d_n$. Ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{S_2^n}(\eta_1^n, \eta_2^n) = \infty$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} L_S(\eta_i^n) = 0$, tenemos que S no es hiperbólica, por el Teorema 3.1 y el Lema 2.10. \square

Teorema 3.12. *Sea S una superficie de Riemann abierta no excepcional, E un conjunto cerrado en S de forma que $S \setminus E$ es conexo por arcos, y $X_1^n, X_2^n \subset S$ superficies con borde tales que $X_i^n \setminus E$ es conexo por arcos, $X_1^n \cap X_2^n = \partial X_1^n \cap \partial X_2^n = \cup_{i \in A^n} \eta_i^n$, $\#A^n \geq 2$, y $d_{X_2^n}(\eta_i^n, \eta_j^n) \geq c_n$ para todos $i, j \in A^n$, $i \neq j$. Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, entonces S y $S \setminus E$ no son hiperbólicas.*

Demostración. Como consecuencia del Teorema 3.3, es obvio que S no es hiperbólica. (Recordemos que, para cada n fijo, toda bola interseca, a lo sumo, una cantidad finita de η_i^n 's, por definición de superficie de Riemann no excepcional con borde, y entonces cada η_i^n es un conjunto cerrado). Para aplicar el Teorema 3.3 a $\tilde{X} = S \setminus E$, definamos $\tilde{X}_i^n = X_i^n \setminus E$ y $\tilde{\eta}_i^n = \eta_i^n \setminus E$ (que es un conjunto cerrado en $S \setminus E$). Es bien conocido (ver, por ejemplo, Lema 3.21 más adelante) que si γ es una curva en $S \setminus E$, entonces $L_{S \setminus E}(\gamma) \geq L_S(\gamma)$; puesto que toda curva en \tilde{X}_i^n está contenida en X_i^n , se tiene que $d_{\tilde{X}_2^n}(\tilde{\eta}_i^n, \tilde{\eta}_j^n) \geq d_{X_2^n}(\tilde{\eta}_i^n, \tilde{\eta}_j^n) \geq d_{X_2^n}(\eta_i^n, \eta_j^n) \geq c_n$ para todos $i, j \in A^n$, $i \neq j$. Entonces, el Teorema 3.3 implica que $S \setminus E$ no es hiperbólica. \square

Teorema 3.13. *Consideremos una superficie de Riemann abierta no excepcional S con género estrecho, y un conjunto cerrado E en S , siendo $S \setminus E$ conexo por arcos y $\Pi_1(S) \leq \Pi_1(S \setminus E)$. Entonces S y $S \setminus E$ no son hiperbólicas.*

Demostración. Puesto que S tiene género estrecho, podemos elegir una sucesión de geodésicas simples cerradas $\{\gamma_n\}_n$ en S con $S \setminus \gamma_n$ conexo y $\lim_{n \rightarrow \infty} L_S(\gamma_n) = 0$.

El Lema del Collar [31] dice que γ_n tiene un collar de anchura d , para todo $0 < d \leq d_n$, donde $\cosh d_n = \coth(L_S(\gamma_n)/2)$. Definimos X_2^n como el collar de γ_n de anchura $d_n/2$, X_1^n como la clausura en S de $S \setminus X_2^n$, $A^n = \{1, 2\}$ y η_1^n, η_2^n , las componentes conexas de $X_1^n \cap X_2^n$.

Entonces $d_{X_2^n}(\eta_1^n, \eta_2^n) = d_n \rightarrow \infty$, y, por tanto, S no es hiperbólica por el Teorema 3.3 (recordemos que A^n sólo tiene dos elementos).

Para estudiar $\tilde{X} = S \setminus E$, consideremos, para cada n , una curva simple cerrada g_n en S que sea transversal a γ_n . Ya que $\Pi_1(S) \leq \Pi_1(S \setminus E)$, podemos asumir que $g_n \subset S \setminus E$, e incluso que g_n es una geodésica simple cerrada en $S \setminus E$. Denotamos por h_n un segmento de g_n uniendo η_1^n y η_2^n en X_2^n . Definimos ahora \tilde{X}_2^n como la componente conexa de $X_2^n \setminus E$ que contiene a h_n , \tilde{X}_1^n como la clausura en \tilde{X} de $\tilde{X} \setminus \tilde{X}_2^n$, $\tilde{A}^n = \{1, 2\}$ y $\tilde{\eta}_1^n, \tilde{\eta}_2^n$, las componentes conexas de $\tilde{X}_1^n \cap \tilde{X}_2^n$. Puesto que $d_{\tilde{X}_2^n}(\tilde{\eta}_1^n, \tilde{\eta}_2^n) \geq d_{X_2^n}(\tilde{\eta}_1^n, \tilde{\eta}_2^n) \geq d_{X_2^n}(\eta_1^n, \eta_2^n) = d_n$, el Teorema 3.3 permite concluir que $S \setminus E$ no es hiperbólica. \square

Decimos que una superficie de Riemann es doblemente conexa si su grupo fundamental es isomorfo a \mathbb{Z} .

Más adelante vamos a necesitar el siguiente resultado:

Teorema 3.14. ([36], Teorema 3.4) *Para cada $l \geq 0$ y cada entero no negativo a , existe una constante $\delta = \delta(a, l)$, que sólo depende de a y l , tal que toda superficie de $\mathcal{S}_G(a, l)$ es δ -hiperbólica.*

Proposición 3.15. *Sea S una superficie de Riemann con borde, simple o doblemente conexa, tal que $L_S(\partial S) \leq a$. Entonces S es δ -hiperbólica, donde δ es una constante que sólo depende de a .*

Observación 3.16. *Como siempre, consideraremos una puntura como una geodésica de longitud cero.*

Demostración. Es bien conocido que S es isométrica a una superficie de Riemann con borde S_1 contenida en R , donde R es el disco unidad \mathbb{D} , el disco menos un punto \mathbb{D}^* o algún anillo $N_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < 1\}$, para $0 < \varepsilon < 1$; entonces R es la unión de S_1 y, a lo sumo, otras dos superficies con borde. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $S_1 = S$. Observemos que el diámetro en R de cada componente conexa de ∂S es menor o igual que a .

Si $R = \mathbb{D}$ o $R = \mathbb{D}^*$, el Teorema 2.3 (con $A_n = \emptyset$) asegura que S es k_4 -hiperbólica, ya que \mathbb{D} y \mathbb{D}^* son hiperbólicos (ver [34], Teorema 3.3), donde k_4 es una constante que sólo depende de a (esto es lo que pasa si S es simplemente conexa).

Si $R = N_\varepsilon$ y γ es la geodésica simple cerrada de N_ε , tenemos que $L_{N_\varepsilon}(\gamma) \leq L_S(\partial S) \leq a$. Aplicando la Proposición 3.1 de [34] se deduce que N_ε es k_5 -hiperbólico, donde k_5 es una constante que sólo depende de a . Por el Teorema 2.3 (con $A_n = \emptyset$), S es k'_4 -hiperbólica, puesto que N_ε es k_5 -hiperbólico, donde k'_4 es una constante que sólo depende de k_5 y a .

Para terminar la demostración, basta con tomar $\delta := \max\{k_4, k'_4\}$. □

En la demostración de la siguiente Proposición se utiliza el teorema que enunciamos a continuación:

Teorema 3.17. ([35], Teorema 3.6) *Consideremos una superficie de Riemann no excepcional S (con o sin frontera) sin género. Si existe una descomposición de S en una unión de foniles $\{F_m\}_{m \in M}$ e Y -piezas generalizadas $\{Y_n\}_{n \in N}$, con $L_S(\gamma) \leq a$ para al menos dos geodésicas simples cerradas $\gamma \subset \partial Y_n$ para todo $n \in N$, entonces S es δ -hiperbólica, donde δ es una constante que sólo depende de a .*

Decimos que una superficie de Riemann es *triplemente conexa* si tiene característica 1 y género 0, o equivalentemente, si su grupo fundamental está generado por dos curvas simples cerradas disjuntas.

Proposición 3.18. *Sea S una superficie de Riemann con borde no excepcional triplemente conexa, tal que ∂S es la unión de dos curvas simples cerradas verificando $L_S(\partial S) \leq a$. Entonces S es δ -hiperbólica, donde δ es una constante que sólo depende de a .*

Demostración. Es conocido que S es isométrica a una superficie con borde S_1 contenida en una superficie de Riemann abierta no excepcional R , donde R es o bien el disco unidad, el disco

menos un punto, un anillo o la unión de una Y -pieza generalizada Y_0 y a lo sumo 3 foniles. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $S_1 = S$.

Si R es el disco unidad, el disco menos un punto o un anillo, procedemos como en la demostración de la Proposición 3.15. En otro caso, R es la unión de S y dos superficies con borde. Observemos que el diámetro en R de cada componente conexa de ∂S es menor o igual que a . Si g_1 y g_2 son las curvas simples cerradas de ∂S , denotamos por γ_i la geodésica simple cerrada de R libremente homótopa a g_i ($i = 1, 2$). Como $L_R(\gamma_i) \leq L_S(g_i) \leq a$, el Teorema 3.17 garantiza que R es k -hiperbólica, donde k es una constante que sólo depende de a . Por el Teorema 2.3 (con $A_n = \emptyset$), S es δ -hiperbólica, donde δ es una constante que sólo depende de a . \square

El siguiente teorema permite acotar uniformemente las constantes de hiperbolicidad de las superficies de Riemann de $\mathcal{S}(a, l)$. Además, pone de manifiesto la estabilidad de la hiperbolicidad de las superficies de Riemann. Jugará un papel destacado en las demostraciones de los teoremas 3.30 y 3.32.

Teorema 3.19. *Para cada $l \geq 0$ y cada entero no negativo a , existe una constante $\delta = \delta(a, l)$, que sólo depende de a y l , tal que toda superficie de $\mathcal{S}(a, l)$ es δ -hiperbólica.*

Demostración. La principal idea de la demostración consiste en considerar una superficie de $\mathcal{S}(a, l)$ como un subconjunto de una superficie de $\mathcal{S}_G(a, l)$, y entonces comprobar que se puede aplicar el Teorema 2.3. Consideremos $S \in \mathcal{S}(a, l)$ y R_0 una superficie de Riemann abierta no excepcional con $S \subseteq R_0$.

Si no existe ninguna geodésica simple cerrada en R_0 libremente homótopa a alguna curva cerrada de ∂S , entonces el grupo fundamental de R_0 es isomorfo a algún subgrupo del grupo fundamental de S (toda curva cerrada de ∂S es bien trivial en R_0 , bien homótopa a una puntura en R_0). En este caso definimos $R := R_0$.

Si no es así, denotamos por $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, las geodésicas simples cerradas de R_0 que son libremente homótopas a alguna curva cerrada en ∂S . Si cortamos R_0 a lo largo de $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, obtenemos superficies con borde R_0^1, \dots, R_0^m . El grupo fundamental $\Pi_1(S \cap R_0^j)$ tiene a lo sumo un generador, excepto quizás para un j . Entonces podemos asumir que el grupo fundamental $\Pi_1(S \cap R_0^j)$ tiene a lo sumo un generador para $j = 2, \dots, m$, y que $\Pi_1(S \cap R_0^1)$ no es trivial. Entonces $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ son las geodésicas simples cerradas en ∂R_0^1 ; consideremos foniles F^1, \dots, F^k ,

con $L(\partial F^j) = L(\gamma_j)$ para $j = 1, \dots, k$. Si pegamos F^1, \dots, F^k a R_0^1 , obtenemos una superficie de Riemann abierta no excepcional R .

En cualquier caso, podemos ver S como un subconjunto de R ; el grupo fundamental de R es isomorfo a algún subgrupo del grupo fundamental de S (algunas curvas cerradas de ∂S pueden ser triviales en R); por tanto $R \in \mathcal{S}_G(a, l)$, y la clausura de $R \setminus S$ es la unión de superficies con borde, simple o doblemente conexas R^1, \dots, R^s , con $s \leq a + 2$ (algún R^i puede ser un entorno de una puntura). Tenemos que $\delta(R) \leq \delta_1(a, l)$ por el Teorema 3.14 y, por tanto, el Teorema 2.3 permite deducir que $\delta(S) \leq \delta(a, l)$, ya que $L(\partial S) \leq (a + 2)l$ implica que $\{S, R^1, \dots, R^s\}$ es una $(l, 0, (a + 2)l)$ -descomposición en árbol de R (tomando $A_n = \emptyset$). \square

Los argumentos contenidos en la demostración del teorema anterior, junto con los teoremas 3.14 y 3.18 permiten deducir el siguiente resultado:

Lema 3.20. *Sea S una superficie de Riemann no excepcional triplemente conexa (con o sin frontera). Asumamos que hay dos outer loops generalizados en S con longitud menor o igual que l . Entonces S es δ -hiperbólica, donde δ es una constante que sólo depende de l .*

Lema 3.21. ([3, Lema 3.1]) *Consideremos una superficie de Riemann S abierta no excepcional, un subconjunto cerrado no vacío C de S , y un número positivo ε . Si $S^* := S \setminus C$, entonces $1 < L_{S^*}(\gamma)/L_S(\gamma) < \coth(\varepsilon/2)$, para toda curva $\gamma \subset S$ de longitud finita en S tal que $d_S(\gamma, C) \geq \varepsilon$.*

Definición 3.22. *Dado un dominio doblemente conexo D en una superficie de Riemann no excepcional, existe $0 \leq \mu < 1$ tal que $\{z : \mu < |z| < 1\}$ es conformemente equivalente a D . Definimos el módulo de D como $\text{mod } D := \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\mu}$.*

Observación 3.23. *El módulo de un dominio doblemente conexo D puede definirse en términos de la longitud extremal (ver [2, p. 224]). Es bien conocido que la geodésica simple cerrada de D (con respecto a la métrica de Poincaré en D) tiene longitud $\pi/\text{mod } D$.*

Definición 3.24. *Un N -entorno normal de un subconjunto F de una superficie de Riemann S es una superficie de Riemann con borde V tal que $F \subset V \subset S$, verificando una de las siguientes condiciones:*

- (i) V es compacto y ∂V es la unión de n curvas cerradas ($1 \leq n \leq N$), que generan el grupo fundamental de V ,
- (ii) V es homeomorfo a un fonil (entonces V es isométrico a un subconjunto no compacto de un anillo o al disco menos un punto \mathbb{D}^* ; recordemos que el collar de una puntura es homeomorfo a un fonil).

Un conjunto $E = \cup_n E_n$ en una superficie de Riemann abierta no excepcional S , siendo $\{E_n\}_n$ conjuntos compactos, se dice que es (r, s, N) -uniformemente separado en S si existen entornos N -normales $\{V_n\}_n$ de E_n tales que $V_n \setminus E_n$ es conexo, $d_S(\partial V_n, E_n) \geq r$, $L_S(\partial V_n) \leq s$ para todo n , y $d_S(V_n, V_m) \geq r$ para todo $n \neq m$.

$E = \cup_n E_n$ se dice que es (r, s, t, N) -uniformemente separado en S si es (r, s, N) -uniformemente separado en S , E_n es simplemente conexo para todo n , y verifica la siguiente propiedad: si V_n es isométrico a un subconjunto no compacto de un anillo o si ∂V_n contiene al menos 3 curvas cerradas, entonces existe un dominio simplemente conexo D_n en S , con $E_n \subset D_n$ y $\text{mod}(D_n \setminus E_n) \geq t$.

Observación 3.25.

1. Si E es (r, s, t, N) -uniformemente separado, cada E_n es simplemente conexo y, por tanto, o bien da lugar a una puntura (si E_n es un punto aislado) o a un fonil (en caso contrario) en S^* . Aunque éstos son casos especialmente importantes para nosotros, observemos que también tratamos el caso de conjuntos compactos generales E_n si E es (r, s, N) -uniformemente separado.
2. Observemos que un N -entorno normal tiene género 0, y, por tanto, $V_n \in \mathcal{S}(\text{máx}\{N - 2, 1\}, s) \subseteq \mathcal{S}(N, s)$ si E es $(0, s, N)$ -uniformemente separado en S .
3. En ningún momento se exige que $D_n \subset V_n$.
4. Si E_n es un punto aislado, $\text{mod}(D_n \setminus E_n) = \infty > t$, para cualquier elección de D_n y t . Si V_n es compacto y ∂V_n es la unión de una o dos curvas cerradas, o si V_n es isométrico a un subconjunto no compacto del disco menos un punto \mathbb{D}^* , entonces no se le pide ninguna condición al módulo de E_n .

Los conjuntos uniformemente separados juegan un papel central en el estudio de las desigualdades isoperimétricas hiperbólicas en superficies de Riemann abiertas (ver [3, Teorema 1], y [14, Teoremas 3 y 4]), y también en otros temas de Análisis Complejo, tales como la medida armónica (ver [26]). Hay interesantes relaciones entre la desigualdad isoperimétrica y otros invariantes conformes de una superficie de Riemann (ver p.e. [3], [11, p. 95], [14], [39, p. 333]).

Necesitamos la siguiente definición para enunciar uno de nuestros resultados principales:

Definición 3.26. Sea S una superficie de Riemann abierta no excepcional y $E = \cup_n E_n$ un conjunto (r, s, N) -uniformemente separado en S . Para cada elección de $\{V_n\}_n$ definimos

$$D_S = D_S(\{V_n\}_n) := \sup_{n,i,j} \{d_S|_{V_n}(\eta_i^n, \eta_j^n) : \eta_i^n, \eta_j^n \text{ son diferentes componentes conexas de } \partial V_n \\ \text{y } \eta_i^n, \eta_j^n \text{ están en la misma componente conexa de } S \setminus \text{int } V_n\},$$

$$D_{S^*} = D_{S^*}(\{V_n\}_n) := \sup_{n,i,j} \{d_{S^*}|_{V_n \setminus E_n}(\eta_i^n, \eta_j^n) : \eta_i^n, \eta_j^n \text{ son diferentes componentes conexas de } \partial V_n \\ \text{y } \eta_i^n, \eta_j^n \text{ están en la misma componente conexa de } S \setminus \text{int } V_n\}.$$

Proposición 3.27. Sea S una superficie de Riemann abierta no excepcional y $E = \cup_n E_n$ un conjunto (r, s, N) -uniformemente separado en S . Asumamos también que podemos elegir los conjuntos $\{V_n\}_n$ de forma que $D_S(\{V_n\}_n) = \infty$ (respectivamente $D_{S^*}(\{V_n\}_n) = \infty$). Entonces S (respectivamente S^*) no es hiperbólica.

Observación 3.28. La conclusión “ S no es hiperbólica” también es cierta si $E = \cup_n E_n$ es un conjunto $(0, s, N)$ -uniformemente separado en S ; de hecho, en esta parte de la demostración no utilizamos el conjunto E en absoluto.

Demostración. Asumamos que $D_S = \infty$. Para cada V_n consideramos las componentes conexas $\{\eta_i^n\}_i$ de ∂V_n . Por hipótesis, existen n_k, i_k, j_k , tales que $\lim_{k \rightarrow \infty} d_{V_{n_k}}(\eta_{i_k}^{n_k}, \eta_{j_k}^{n_k}) = \infty$, con $\eta_{i_k}^{n_k}, \eta_{j_k}^{n_k}$ en la misma componente conexa de $S \setminus \text{int } V_{n_k}$.

Definamos $X_2^k := V_{n_k}$, X_1^k como la componente conexa de $S \setminus \text{int } V_{n_k}$ que contiene a $\eta_{i_k}^{n_k} \cup \eta_{j_k}^{n_k}$ y X_3^k como la unión de las otras componentes de $S \setminus \text{int } V_{n_k}$ (si las hay).

Puesto que hay, a lo sumo, N términos en la unión en i en $\{\eta_i^n\}_i$ y $\sum_i L_S(\eta_i^n) = L_S(\partial V_n) \leq s$, el Teorema 3.8 garantiza que S no es hiperbólica.

Si $D_{S^*} = \infty$, obtenemos un resultado similar para S^* , puesto que $d_S(\partial V_n, E_n) \geq r$ y el Lema 3.21 implican la desigualdad $L_{S^*}(\partial V_n) \leq s \coth(r/2)$. \square

Puesto que $D_S(\{V_n\}_n) \leq D_{S^*}(\{V_n\}_n)$, podemos deducir el siguiente resultado:

Corolario 3.29. *Sea S una superficie de Riemann abierta no excepcional y $E = \cup_n E_n$ un conjunto (r, s, N) -uniformemente separado en S . Asumamos también que podemos elegir los conjuntos $\{V_n\}_n$ de forma que $D_S(\{V_n\}_n) = \infty$. Entonces S y S^* no son hiperbólicas.*

A continuación vamos a enunciar el resultado más importante del capítulo. Permite, en muchos casos, estudiar la hiperbolicidad de una superficie de Riemann en términos de la hiperbolicidad local de sus finales, lo que constituye una notable simplificación. Además hemos determinado cuáles son los parámetros relevantes en las constantes de hiperbolicidad.

Teorema 3.30. *Sea S una superficie de Riemann abierta no excepcional y $E = \cup_n E_n$ un conjunto (r, s, N) -uniformemente separado en S . Entonces, $S^* := S \setminus E$ es δ^* -hiperbólica si y sólo si S es δ -hiperbólica, $D_{S^*}(\{V_n\}_n)$ es finito y $V_n \setminus E_n$ es k -hiperbólico para todo n (con $d_{S^*}|_{V_n \setminus E_n}$).*

Además, si $D_{S^}(\{V_n\}_n)$ es finito y $V_n \setminus E_n$ es k -hiperbólico para todo n , entonces δ^* (respectivamente δ) es una constante universal que sólo depende de $r, s, N, k, D_{S^*}(\{V_n\}_n)$ y δ (respectivamente $r, s, N, D_{S^*}(\{V_n\}_n)$ y δ^*).*

Observación 3.31. *Recordemos que $d_{S^*} \neq d_S|_{S^*}$, puesto que (S^*, d_{S^*}) es una variedad Riemanniana geodésicamente completa (los puntos de E están a d_{S^*} -distancia infinita de los puntos de S^* ; de hecho, S^* es una superficie de Riemann abierta no excepcional).*

Demostración. Si $D_{S^*}(\{V_n\}_n) = \infty$, aplicando la Proposición 3.27 deducimos que S^* no es hiperbólica. Veamos ahora que si $D_{S^*}(\{V_n\}_n) < \infty$, S^* es hiperbólica si y sólo si S es hiperbólica y $V_n \setminus E_n$ es k -hiperbólico para todo n , con lo que tendremos probado lo que queremos.

La idea principal de la demostración consiste en construir dos descomposiciones en árbol $\{X_n\}_{n \in \Lambda}$ de S y $\{X_n^*\}_{n \in \Lambda}$ de S^* que, gracias al Teorema 2.3, permitirán relacionar la hiperbolicidad de S con la de S^* .

Para conseguir las descomposiciones en árbol, necesitamos construir conjuntos abiertos U_n con mejores propiedades que los V_n . Por una parte, si toda componente conexa η de ∂V_n desconecta S (en particular, si ∂V_n es conexa), definimos $U_n := \text{int } V_n$. Por otra parte, si ∂V_n tiene

una componente conexa η , con $S \setminus \eta$ conexa (y entonces hay otra componente conexa con la misma propiedad), obtenemos un conjunto abierto U_n , modificando V_n de la forma siguiente: Vamos a considerar cada par de componentes conexas distintas η_i^n, η_j^n de ∂V_n con η_i^n, η_j^n pertenecientes a la misma componente conexa de $S \setminus \text{int } V_n$; si $d_S|_{V_n}(\eta_i^n, \eta_j^n) < r/2$, denotemos por s_{ij}^n una geodésica en V_n (con $d_S|_{V_n}$) uniendo η_i^n y η_j^n con $L_S(s_{ij}^n) = d_S|_{V_n}(\eta_i^n, \eta_j^n) < r/2$; entonces $d_S|_{V_n}(s_{ij}^n, E_n) \geq r/2$, y $d_S(s_{ij}^n, E) \geq r/2$ (ya que $d_S(\partial V_n, E_n) \geq r$ y $d_S(V_n, V_m) \geq r$), y por tanto, el Lema 3.21 permite afirmar que $L_{S^*}(s_{ij}^n) \leq \coth(r/4)L_S(s_{ij}^n) \leq (r/2)\coth(r/4)$; si $d_S|_{V_n}(\eta_i^n, \eta_j^n) \geq r/2$, denotemos por s_{ij}^n una geodésica en $V_n \setminus E_n$ (con $d_{S^*}|_{V_n \setminus E_n}$) uniendo η_i^n y η_j^n con $L_{S^*}(s_{ij}^n) = d_{S^*}|_{V_n \setminus E_n}(\eta_i^n, \eta_j^n) \leq D_{S^*}(\{V_n\}_n)$. Definamos $D'_{S^*} := \max\{(r/2)\coth(r/4), D_{S^*}\}$; entonces $L_{S^*}(s_{ij}^n) \leq D'_{S^*}$.

Es obvio que $U_n := \text{int } V_n \setminus \cup_{i \neq j} s_{ij}^n$ es un conjunto abierto; si $\eta_{i_1}^n, \dots, \eta_{i_q}^n$, están en la misma componente conexa de $S \setminus \text{int } V_n$, entonces pertenecen también a la misma componente conexa η_{i_1, \dots, i_q}^n de ∂U_n (observemos que $S \setminus \eta_{i_1, \dots, i_q}^n$ no es conexo); si η_i^n es una componente conexa de ∂V_n y es también una componente conexa de ∂U_n , entonces desconecta S ; por tanto, toda componente conexa de ∂U_n desconecta S .

Es evidente que $E_n \subset U_n$ (puesto que s_{ij}^n es una geodésica en V_n con $L_S(s_{ij}^n) < r/2$ o una geodésica en $V_n \setminus E_n$). También se verifica que $\overline{U_n} = V_n$ y $d_S(U_n, U_m) = d_S(V_n, V_m) \geq r$.

Denotemos por K el conjunto de índices de n (K es finito o numerable). Para cada $n \in K$, definamos $X_n := \overline{U_n} = V_n$ y $X_n^* := \overline{U_n} \setminus E_n = V_n \setminus E_n$.

Consideremos las componentes conexas $\{X_n\}_{n \in J}$ de $S \setminus \cup_{n \in K} U_n$. Si definimos $X_n^* := X_n$ para $n \in J$, y $\Lambda := K \cup J$, entonces $S = \cup_{n \in \Lambda} X_n$ y $S^* = \cup_{n \in \Lambda} X_n^*$.

Afirmación. Afirmamos ahora que $\{X_n\}_{n \in \Lambda}$ y $\{X_n^*\}_{n \in \Lambda}$ son $(k_1, k_1/r, Nk_1)$ -descomposiciones en árbol de S y S^* , respectivamente, donde $k_1 := s \coth(r/2) + D'_{S^*}$.

Continuemos con la prueba, asumiendo por el momento que la afirmación anterior es cierta.

Para todo $n \in K$, se tiene que $X_n = \overline{U_n} = V_n$ pertenece a $\mathcal{S}(N, s)$ (ver el punto 2 de la observación 3.25); consecuentemente, el Teorema 3.19 permite deducir que X_n es k_5 -hiperbólico, con una constante k_5 que sólo depende de N y s .

Si $n \in J$, recordemos que $X_n = X_n^*$ es una unión de superficies de Riemann con borde y geodésicas. Si s_{ij}^m es una de tales curvas, consideramos dos casos:

- (i) Si $d_S|_{V_m}(\eta_i^m, \eta_j^m) < r/2$, entonces, por el Lema 3.21, $1 < L_{S^*}(s_{ij}^m)/L_S(s_{ij}^m) < \coth(r/4)$.
- (ii) Si $d_S|_{V_m}(\eta_i^m, \eta_j^m) \geq r/2$, entonces $D_{S^*} \geq L_{S^*}(s_{ij}^m)$ y $L_S(s_{ij}^m) \geq r/2$, y concluimos $1 <$

$$L_{S^*}(s_{ij}^m)/L_S(s_{ij}^m) \leq 2D_{S^*}/r.$$

Puesto que $\max\{\coth(r/4), 2D_{S^*}/r\} = (2/r) \max\{(r/2) \coth(r/4), D_{S^*}\} = 2D'_{S^*}/r$, entonces, en cualquier caso, $1 < L_{S^*}(s_{ij}^m)/L_S(s_{ij}^m) \leq 2D'_{S^*}/r$. Por tanto, podemos definir una aplicación $i_n : X_n \longrightarrow X_n^*$, que es la identidad en cada superficie de Riemann con borde y una dilatación en las geodésicas que unen las superficies con borde. En las superficies con borde, la identidad es una $(\coth(r/2), 0)$ -quasi-isometría por el Lema 3.21. Ya que $\coth(r/2) \leq 2D'_{S^*}/r$, entonces tanto esta aplicación i_n como su inversa i_n^{-1} son $(2D'_{S^*}/r, 0)$ -quasi-isometrías.

Por tanto, aplicando el Teorema 1.13 deducimos que si X_n^* es k_4^* -hiperbólico para todo $n \in J$, entonces X_n es k_4 -hiperbólico para todo $n \in J$, donde k_4 sólo depende de r, D_{S^*} y k_4^* , y que si X_n es k_4 -hiperbólico para todo $n \in J$, entonces X_n^* es k_4^* -hiperbólico para todo $n \in J$, donde k_4^* sólo depende de r, D_{S^*} y k_4 .

Asumamos que S^* es δ^* -hiperbólica. Por tanto, el Teorema 2.3 garantiza que X_n^* es k_4^* -hiperbólico para todo $n \in \Lambda$ (donde k_4^* sólo depende de r, s, N, D_{S^*} y δ^*); por tanto, $V_n \setminus E_n$ es k_4^* -hiperbólico para todo $n \in K$ y X_n es k_4 -hiperbólico para todo $n \in J$ (donde k_4 sólo depende de r, s, N, D_{S^*} y δ^*). Puesto que X_n es k_5 -hiperbólico para todo $n \in K$, si aplicamos el Teorema 2.3 de nuevo, obtenemos que S es δ -hiperbólica donde δ sólo depende de r, s, N, D_{S^*} y δ^* .

Asumamos ahora que S es δ -hiperbólica y que X_n^* es k -hiperbólico para todo $n \in K$. Por tanto, aplicando el Teorema 2.3 deducimos que X_n es k_4 -hiperbólico para todo $n \in J$ (donde k_4 sólo depende de r, s, N, D_{S^*} y δ), y, por tanto, X_n^* es k_4^* -hiperbólico para todo $n \in J$ (donde k_4^* sólo depende de r, s, N, D_{S^*} y δ). Si aplicamos otra vez el Teorema 2.3, deducimos que S^* es δ^* -hiperbólica, donde δ^* sólo depende de r, s, k, N, D_{S^*} y δ .

Probemos ahora la afirmación que habíamos dada por cierta:

Si $n \in K$, cada X_n (con $d_S|_{X_n}$) y cada X_n^* (con $d_{S^*}|_{X_n^*}$) son superficies de Riemann no excepcionales con borde, y, por tanto, espacios métricos geodésicos.

Observemos que para cada $n \in J$, X_n es una superficie con borde o una unión de superficies con borde $\cup_m M_m$, con M_{m_1} y M_{m_2} unidas por geodésicas en S y/o en S^* . Tales geodésicas están contenidas en $\cup_k V_k$, y hay, a lo sumo, un número finito de ellas en cada V_k . La condición $d_S(V_{n_1}, V_{n_2}) \geq r$ para todo $n_1 \neq n_2$ garantiza que toda bola de S (o de S^*) interseca, a lo sumo, un número finito de V_k 's. Por tanto, X_n y X_n^* son espacios métricos geodésicos.

Analícemos ahora dos hechos:

- (a) Se tiene que $X_n \cap X_m = X_n^* \cap X_m^* =: \sigma_{nm}$, donde σ_{nm} es conexa: esto es obvio si $n \in K$,

puesto que en ese caso, toda componente conexa σ de ∂U_n desconecta S ; si $n \in J$ y $X_n \cap X_m \neq \emptyset$, entonces $m \in K$, y podemos aplicar el último argumento con m en lugar de n (observemos que $X_n \cap X_m = \emptyset$ si $n, m \in J$ o $n, m \in K$). Si $n \in K$, σ_{nm} es una componente conexa de ∂U_n ; ya vimos durante la construcción de X_n , que $X_n \setminus \sigma_{nm}$ no es conexo. Es evidente que $\{\sigma_{nm}\}_m$ son subconjuntos cerrados de X_n disjuntos dos a dos.

Toda geodésica de S con longitud finita interseca, a lo sumo, un número finito de σ_{nm} 's, puesto que $d_S(U_n, U_m) \geq r$ para todo $n \neq m$, y $\{\sigma_{nm}\}_m$ es un conjunto con N elementos como mucho, para todo $n \in K$. El mismo resultado es cierto para S^* .

- (b) El Lema 3.21 asegura que $\text{diam}_{X_n}(\sigma_{nm}) \leq \text{diam}_{X_n^*}(\sigma_{nm}) \leq L_{S^*}(\partial V_n) + D'_{S^*} \leq s \coth(r/2) + D'_{S^*} = k_1$, si $n \in K$; si $n \notin K$, entonces $m \in K$ y se tiene el mismo resultado.

Si $n \in K$, elegimos $A_n = \emptyset$; entonces $\sum_m \text{diam}_{X_n}(\sigma_{nm}) \leq \sum_m \text{diam}_{X_n^*}(\sigma_{nm}) \leq Nk_1$.

Si $n \in J$, elegimos $A_n = \Lambda$; entonces $d_{X_n^*}(\sigma_{nm}, \sigma_{nk}) \geq d_{X_n}(\sigma_{nm}, \sigma_{nk}) \geq d_S(V_m, V_k) \geq r \geq (r/k_1) \text{diam}_{X_n^*}(\sigma_{nm}) \geq (r/k_1) \text{diam}_{X_n}(\sigma_{nm})$.

Estos hechos terminan de probar la afirmación que queríamos demostrar. \square

El siguiente teorema es una consecuencia del que acabamos de ver; permite, en muchos casos, olvidarse de punturas y foniles (e incluso de finales más generales) para estudiar la hiperbolicidad de una superficie de Riemann; de esta forma se consigue simplificar notablemente la topología de la superficie y facilitar el estudio de su hiperbolicidad. Recordemos que la eliminación de un punto aislado de S da lugar a una puntura en S^* , y la de un conjunto cerrado simplemente conexo de S origina un fonil en S^* .

El enunciado del siguiente teorema contiene una hipótesis adicional sobre E frente al teorema anterior, lo que permite obtener una conclusión más sencilla.

Teorema 3.32. *Sea S una superficie de Riemann abierta y $E = \cup_n E_n$ un conjunto (r, s, t, N) -uniformemente separado en S . Entonces, $S^* := S \setminus E$ es δ^* -hiperbólico si y sólo si S es δ -hiperbólico y $D_{S^*}(\{V_n\}_n)$ es finito.*

Además, si $D_{S^}(\{V_n\}_n)$ es finito, entonces δ^* (respectivamente δ) es una constante universal que sólo depende de $r, s, t, N, D_{S^*}(\{V_n\}_n)$ y δ (respectivamente $r, s, N, D_{S^*}(\{V_n\}_n)$ y δ^*).*

Demostración. Para aplicar el Teorema 3.30, necesitamos tan sólo demostrar que $X_n^* := V_n \setminus E_n$ es k -hiperbólico para todo $n \in K$, donde k es una constante que sólo depende de r, s, t y N .

Recordemos que para todo $n \in K$, o bien $X_n = V_n$ es compacto y pertenece a $\mathcal{S}(N, s)$, o bien V_n es homeomorfo a un fonil.

Denotemos por γ_n (respectivamente γ_n^*) la geodésica simple cerrada de X_n^* (respectivamente en S^*) que “rodea” E_n (si E_n es un punto aislado, vemos γ_n como una puntura y $L_{S^*}(\gamma_n) = 0$).

Si ∂V_n contiene al menos 3 curvas cerradas, denotamos por γ'_n la geodésica simple cerrada en $D_n \setminus E_n$; ya que $D_n \setminus E_n \subseteq S^*$, tenemos $L_{S^*}(\gamma_n^*) \leq L_{S^*}(\gamma'_n) \leq L_{D_n \setminus E_n}(\gamma'_n) = \pi / \text{mod}(D_n \setminus E_n) \leq \pi/t$. Puesto que el Lema 3.21 implica que $L_{S^*}(\partial V_n) < L_S(\partial V_n) \coth(r/2) \leq s \coth(r/2)$, deducimos que $L_{S^*}(\gamma_n) \leq L_{S^*}(\gamma_n^*) + L_{S^*}(\partial V_n) < s \coth(r/2) + \pi/t$.

Observemos que todo outer loop generalizado γ distinto de γ_n en $X_n^* = V_n \setminus E_n$, es libremente homótopo a alguna curva cerrada de ∂V_n ; entonces, el Lema 3.21 garantiza que $L_{S^*}(\gamma) \leq L_{S^*}(\partial V_n) < s \coth(r/2)$. Por tanto, $X_n^* \in \mathcal{S}(N+1, s \coth(r/2) + \pi/t)$. El Teorema 3.19 afirma que X_n^* es k_5^* -hiperbólico, con constante k_5^* que sólo depende de r, s, t y N .

Si V_n es isométrico a un subconjunto no compacto de un anillo o del disco menos un punto \mathbb{D}^* , un argumento similar (utilizando ahora el Lema 3.20 en lugar del Teorema 3.19) permite obtener la misma conclusión; en el caso de \mathbb{D}^* , no necesitamos ninguna condición sobre el módulo, porque hay dos curvas cerradas de longitud acotada en X_n^* : ∂V_n y la puntura.

Consideremos ahora cualquier $n \in K$ tal que V_n es compacto y ∂V_n es la unión de una o dos curvas cerradas. Un argumento similar (aplicando ahora el Teorema 3.19 o el Teorema 3.18 respectivamente) permite obtener la misma conclusión. \square

El teorema anterior permite deducir la siguiente consecuencia directa:

Corolario 3.33. *Sea S una superficie de Riemann abierta no excepcional y $E = \cup_n E_n$ un conjunto (r, s, t, N) -uniformemente separado en S . Asumamos también que podemos elegir los conjuntos $\{V_n\}_n$ de forma que toda componente conexa de ∂V_n desconecte S . Entonces, $S^* := S \setminus E$ es δ^* -hiperbólico si y sólo si S es δ -hiperbólico. Además, δ^* (respectivamente δ) es una constante universal que sólo depende de r, s, t, N y δ (respectivamente r, s, N y δ^*).*

Con una ligera variación en la definición de conjunto (r, s, t, N) -uniformemente separado se pueden conseguir dos resultados más generales:

Corolario 3.34. *La conclusión del Teorema 3.32 también es cierta si debilitamos la definición de conjunto (r, s, t, N) -uniformemente separado de la forma siguiente: para un subconjunto arbi-*

trario de n 's con V_n isométrico a un subconjunto no compacto de un anillo, podemos sustituir la hipótesis “existe un dominio simplemente conexo D_n en S , con $E_n \subset D_n$ y $\text{mod}(D_n \setminus E_n) \geq t$ ” por la de “ $\text{diam}_S(E_n) \leq 1/t$ y $d_S(\partial V_n, E_n) \leq 1/t$ ”.

Demostración. Denotemos por K_0 el conjunto de índices n con V_n isométrico a un subconjunto no compacto de un anillo, $\text{diam}_S(E_n) \leq 1/t$ y $d_S(\partial V_n, E_n) \leq 1/t$. Para poder utilizar el camino seguido en la demostración del Teorema 3.32, sólo es necesario comprobar que X_n^* es k_5^* -hiperbólico para todo $n \in K_0$, con una constante k_5^* que depende únicamente de r, s y t . El Lema 3.20 permite deducir este hecho, siempre que podamos encontrar dos outer loops generalizados en X_n^* de longitud menor o igual que $c = c(r, s, t)$.

Fijemos $n \in K_0$ y denotemos por g_n la geodésica simple cerrada de S libremente homótopa a ∂V_n y por F_n el fonil de S con frontera g_n ; existe g_n porque V_n es isométrico a un subconjunto no compacto de un anillo, y por esa razón V_n no puede ser un entorno de una puntura. Obviamente $L_S(g_n) \leq L_S(\partial V_n) \leq s$.

Si ∂V_n interseca F_n , definimos $l := d_S(\partial V_n, g_n)$; en otro caso, definimos $l := 0$. Consideremos la curva frontera g'_n del collar de g_n de anchura l que está contenido en F_n . Es un hecho conocido que $L_S(g'_n) = L_S(g_n) \cosh l$; este cálculo puede realizarse fácilmente utilizando coordenadas de Fermi (ver p.e. [11, p. 247]). También es cierto que $L_S(g'_n) \leq L_S(\partial V_n) \leq s$ (ver p.e. [6, Lema 4]). Por tanto, $L_S(g_n)e^l \leq 2s$.

Denotemos por g''_n la curva frontera del collar de g_n de anchura $x := l + 2/t + s/2 + r$ que está contenida en F_n . Ya que $L_S(g''_n) = L_S(g_n) \cosh x$, deducimos que $L_S(g''_n) \leq L_S(g_n)e^l e^{2/t+s/2+r} \leq 2se^{2/t+s/2+r}$.

Observemos que $d_S(g''_n, E_n) \geq d_S(g''_n, g_n) - d_S(g_n, g'_n) - \text{diam}_S(\partial V_n) - d_S(\partial V_n, E_n) - \text{diam}_S(E_n) \geq x - l - s/2 - 1/t - 1/t = r$. Por tanto, el Lema 3.21 implica que $L_{S^*}(g''_n) \leq 2se^{2/t+s/2+r} \coth(r/2)$ y $L_{S^*}(\partial V_n) \leq s \coth(r/2)$. Si ∂V_n interseca F_n , la curva g''_n está contenida en X_n^* , puesto que ∂V_n está contenida en el collar de g_n de anchura $l + s/2$. Si ∂V_n no interseca F_n , también es cierto que la curva g''_n está contenida en X_n^* , porque $g''_n \subset F_n \subset V_n = X_n$. Si g_n^* es el outer loop generalizado de X_n^* libremente homótopo a g''_n en X_n^* , es obvio que $L_{S^*}(g_n^*) \leq L_{S^*}(g''_n) \leq 2se^{2/t+s/2+r} \coth(r/2)$. Si aplicamos el Lema 3.20, podemos concluir la demostración. \square

Utilizando argumentos similares, podemos probar el siguiente resultado:

Corolario 3.35. *La conclusión del Teorema 3.32 también es cierta si debilitamos la definición de conjunto (r, s, t, N) -uniformemente separado de la forma siguiente: Para un subconjunto arbitrario de n 's con V_n isométrico a un subconjunto no compacto de un anillo, podemos sustituir la hipótesis “existe un dominio simplemente conexo D_n en S , con $E_n \subset D_n$ y $\text{mod}(D_n \setminus E_n) \geq t$ ” por la de “ $\min\{L_{S^*}(\gamma_2^n), L_{S^*}(\gamma_3^n)\} \leq 1/t$ ”, donde γ_2^n, γ_3^n son los outer loops de S^* correspondientes a $V_n \setminus E_n$.*

La condición “ $\min\{L_{S^*}(\gamma_2^n), L_{S^*}(\gamma_3^n)\} \leq 1/t$ ” para un subconjunto arbitrario de n 's con V_n isométrico a un subconjunto no compacto de un anillo, es la mejor posible; de hecho, es equivalente a “ $V_n \setminus E_n$ es k -hiperbólico” para todo n de ese subconjunto de n 's. Esta equivalencia es una consecuencia directa del Corolario 3.39 enunciado más adelante; pero, para demostrarlo, necesitamos primero el siguiente teorema, que también tiene interés propio.

Teorema 3.36. *Consideremos $L_1, L_2 > 0$ y la Y -pieza generalizada Y_0 con geodésicas simples cerradas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ de longitudes respectivas $l_1 \leq l_2 \leq l_3$ verificando $0 \leq l_1 \leq L_1$ y $L_2 \leq l_2, l_3$. Sea S cualquier superficie de Riemann no excepcional (con o sin frontera) conteniendo a Y_0 tal que γ_2, γ_3 sean outer loops de S . La mejor constante de hiperbolicidad δ de S satisface $\delta \geq D(L_1, L_2)$, donde $\lim_{L_2 \rightarrow \infty} D(L_1, L_2) = \infty$, para todo L_1 fijo.*

Observación 3.37. *Como quedará patente en la demostración, la hipótesis “ γ_2, γ_3 son outer loops de S ” puede ser reemplazada por la de “una geodésica en S uniendo dos puntos de γ_2 sólo puede salir de Y_0 cruzando γ_1 ”. Tenemos ejemplos que demuestran que la conclusión del Corolario 3.35 falla si una geodésica en S uniendo dos puntos de γ_2 puede salir de Y_0 cruzando γ_2 o γ_3 .*

Para demostrar el Teorema 3.36, necesitamos el siguiente lema elemental (probado en [35, Lema 3.1]).

Lema 3.38. *Consideremos un espacio métrico geodésico X y $\varepsilon > 0$. Si γ es una curva continua uniendo $x, y \in X$ con $L_X(\gamma) \leq d_X(x, y) + \varepsilon$, entonces γ es una $(1, \varepsilon)$ -quasigeodésica con su parametrización de longitud de arco.*

Demostración. La idea que subyace tras la demostración es que, dados dos puntos de γ_2 , la distancia entre ellos es, aproximadamente, la longitud de una subcurva de γ_2 que los una.

Denotemos por $p_2 \in \gamma_2, p_3 \in \gamma_3$, los puntos tales que $d_{Y_0}(p_2, p_3) = d_{Y_0}(\gamma_2, \gamma_3) =: s$. Elegimos los puntos $q_2 \in \gamma_2, q_3 \in \gamma_3$, con $d_{Y_0}(p_2, q_2) = l_2/2$ y $d_{Y_0}(p_3, q_3) = l_3/2$. Si partimos Y_0 a lo largo de las geodésicas que comienzan ortogonalmente a γ_2 en p_2 y q_2 , y a γ_3 en q_3 , obtenemos dos hexágonos rectángulos isométricos H_1, H_2 . Cada H_i tiene tres lados alternos de longitudes $l_1/2, l_2/2, l_3/2$.

Consideremos el biángulo localmente geodésico γ_2 en S con vértices $\{p_2, q_2\}$. Veamos a continuación que es $(1, L_1)$ -quasigeodésico en S .

Puesto que H_1 y H_2 son isométricos y γ_2, γ_3 son outer loops en S , si una geodésica en S uniendo p_2 con q_2 no está contenida en γ_2 , entonces debe unir p_2 con γ_1 . Por el Lema 3.38 sólo necesitamos demostrar que $l_2/2 \leq d_S(p_2, q_2) + L_1$. Denotemos por B el lado opuesto a $[p_3, q_3]$ y por z' el punto $z' := B \cap \gamma_1$. Elegimos el punto $z_0 \in \gamma_1$ con $d_{H_1}(p_2, z_0) = d_{H_1}(p_2, \gamma_1)$. Consideramos ahora el cuadrilátero rectángulo $\{p_2, q_2, z', z_0\}$ en H_1 . Si $L(B) \geq l_1/2$, entonces $d_{H_1}(z', z_0) \leq L(B)$, y, por trigonometría hiperbólica deducimos que $l_2/2 \leq d_{H_1}(p_2, z_0) = d_{H_1}(p_2, \gamma_1)$; por tanto, $\gamma_2 \cap H_1$ es una geodésica en S y $l_2/2 = d_S(p_2, q_2)$. Si $d_S(p_2, q_2) < l_2/2$, entonces $d_S(p_2, q_2) > d_{H_1}(p_2, \gamma_1)$, y por tanto $L(B) < l_1/2$. Por la desigualdad triangular:

$$l_2/2 \leq d_{H_1}(p_2, z_0) + d_{H_1}(z_0, z') + L(B) < d_{H_1}(p_2, \gamma_1) + L_1/2 + L_1/2 < d_S(p_2, q_2) + L_1.$$

Estudiemos ahora la constante thin del biángulo $(1, L_1)$ -quasigeodésico.

Elegimos el punto $z \in \gamma_2 \cap H_1$ tal que $d_{H_1}(z, p_2) = d_{H_1}(z, q_2) = l_2/4$. Consideremos el punto $z'' \in \gamma_1$ con $d_{H_1}(z, z'') = d_{H_1}(z, \gamma_1)$.

Considerando el triángulo rectángulo $\{z, q_2, z'\}$ en H_1 obtenemos $d_{H_1}(z, z') \geq d_{H_1}(z, q_2) = l_2/4$. Por tanto, $d_{H_1}(z, \gamma_1) = d_{H_1}(z, z'') \geq d_{H_1}(z, z') - d_{H_1}(z', z'') \geq l_2/4 - l_1/2 \geq L_2/4 - L_1/2$.

Ahora vamos a intentar encontrar una cota de $d_{H_1}(z, A)$, donde A es el lado opuesto a $[p_2, q_2]$ en H_1 .

Por trigonometría hiperbólica estándar (ver p.e. [6, p. 161])

$$\cosh s = \frac{\cosh(l_1/2) + \cosh(l_2/2) \cosh(l_3/2)}{\sinh(l_2/2) \sinh(l_3/2)} \geq \coth(l_2/2) \coth(l_3/2).$$

Consideremos la geodésica γ_0 que da la distancia en H_1 entre $[p_2, q_2]$ y A ; definimos $x := \gamma_0 \cap [p_2, q_2]$ y $y := \gamma_0 \cap A$. La geodésica γ_0 divide H_1 en dos pentágonos rectángulos. La trigonometría hiperbólica aplicada a pentágonos (ver p.e. [6, p. 159]) da que $\cosh L(\gamma_0) = \sinh s \sinh(l_3/2)$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\cosh^2 L(\gamma_0) &= \sinh^2 s \sinh^2(l_3/2) \geq (\cotanh^2(l_2/2) \cotanh^2(l_3/2) - 1) \sinh^2(l_3/2) \\
&\geq ((1 + 2e^{-l_2})^2 (1 + 2e^{-l_3})^2 - 1) \sinh^2(l_3/2) \\
&\geq (4e^{-l_2} + 4e^{-l_3}) \frac{e^{l_3} - 2}{4} = (e^{-l_2} + e^{-l_3})(e^{l_3} - 2) \\
&= 1 + e^{l_3-l_2} - 2(e^{-l_2} + e^{-l_3}).
\end{aligned}$$

Por tanto, $\sinh^2 L(\gamma_0) \geq 1 - 4e^{-L_2}$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $L_2 > 2 \log 2$ (y entonces $1 - 4e^{-L_2} > 0$), ya que la conclusión del teorema se ocupa del caso en el que el límite L_2 tiende a infinito). Nuevamente, aplicando la trigonometría hiperbólica de pentágonos, deducimos que $\sinh d_{H_1}(x, q_2) \sinh L(\gamma_0) = \cosh(l_1/2)$, y, por tanto,

$$\sinh d_{H_1}(x, q_2) = \frac{\cosh(l_1/2)}{\sinh L(\gamma_0)} \leq \frac{\cosh(L_1/2)}{\sqrt{1 - 4e^{-L_2}}}.$$

Sea σ la geodésica en H_1 que une z con A , y tal que $L(\sigma) = d_{H_1}(z, A)$. Si $u := \sigma \cap A$, aplicando trigonometría hiperbólica al cuadrilátero rectángulo $\{z, u, y, x\}$ obtenemos que $\sinh d_{H_1}(z, A) = \sinh L(\sigma) = \sinh L(\gamma_0) \cosh d_{H_1}(x, z)$. Tenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} e^{2d_{H_1}(x, q_2)} &\leq \cosh^2 d_{H_1}(x, q_2) \leq \frac{\cosh^2(L_1/2)}{1 - 4e^{-L_2}} - 1 \leq \frac{\sinh^2(L_1/2) + 4e^{-L_2}}{1 - 4e^{-L_2}}, \\
e^{-d_{H_1}(x, q_2)} &\geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - 4e^{-L_2}}{\sinh^2(L_1/2) + 4e^{-L_2}}} \geq \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 - 4e^{-L_2}}}{\sinh(L_1/2) + 2e^{-L_2/2}}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\sinh d_{H_1}(z, A) &= \sinh L(\gamma_0) \cosh d_{H_1}(x, z) = \sinh L(\gamma_0) \cosh(l_2/4 - d_{H_1}(x, q_2)) \\
&\geq \sqrt{1 - 4e^{-L_2}} \frac{1}{2} e^{l_2/4 - d_{H_1}(x, q_2)} \geq \frac{e^{L_2/4}}{4} \frac{1 - 4e^{-L_2}}{\sinh(L_1/2) + 2e^{-L_2/2}}.
\end{aligned}$$

Utilizando que $\operatorname{arcsinh} t \geq \log(2t)$, deducimos

$$d_{H_1}(z, A) \geq \log \left(2 \frac{e^{L_2/4}}{4} \frac{1 - 4e^{-L_2}}{\sinh(L_1/2) + 2e^{-L_2/2}} \right) = \frac{L_2}{4} - \log \left(\frac{2 \sinh(L_1/2) + 4e^{-L_2/2}}{1 - 4e^{-L_2}} \right).$$

Consideremos una geodésica η en S uniendo z con $\gamma_2 \cap H_2$ tal que $L(\eta) = d_S(z, \gamma_2 \cap H_2)$. Puesto que γ_2, γ_3 son outer loops en S , si η no está contenida en γ_2 , entonces debe intersectar bien A o bien γ_1 . Por tanto, aplicando el Lema 2.10,

$$\begin{aligned}
K(\delta, 1, L_1) &\geq d_S(z, \gamma_2 \cap H_2) \geq \min \left\{ \frac{L_2}{4} - \frac{L_1}{2}, \frac{L_2}{4} - \log \left(\frac{2 \sinh(L_1/2) + 4e^{-L_2/2}}{1 - 4e^{-L_2}} \right) \right\} \\
&= \frac{L_2}{4} - \max \left\{ \frac{L_1}{2}, \log \left(\frac{2 \sinh(L_1/2) + 4e^{-L_2/2}}{1 - 4e^{-L_2}} \right) \right\} =: E(L_1, L_2).
\end{aligned}$$

Fijemos L_1 . Puesto que $K(\delta, 1, L_1) = 4\delta + 2H(\delta, 1, L_1)$ es una función creciente en δ , podemos considerar su función inversa $F(t, L_1)$. Entonces $\delta \geq D(L_1, L_2) := F(E(L_1, L_2), L_1)$.

Tenemos que $\lim_{\delta \rightarrow \infty} K(\delta, 1, L_1) = \infty$, ya que $K(\delta, 1, L_1) = 4\delta + 2H(\delta, 1, L_1)$. Es evidente que $\lim_{L_2 \rightarrow \infty} E(L_1, L_2) = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, L_1) = \infty$, para todo L_1 fijo. Por tanto, $\lim_{L_2 \rightarrow \infty} D(L_1, L_2) = \infty$ para todo L_1 fijo. \square

Corolario 3.39. *Consideremos $L_1, L_2 > 0$ y S una superficie de Riemann no excepcional con borde triplemente conexa tal que ∂S contiene una curva simple cerrada g_1 con $L(g_1) \leq L_1$. Asumamos también que S contiene dos geodésicas simples cerradas γ_2, γ_3 no libremente homótopas a g_1 con $L(\gamma_2), L(\gamma_3) \geq L_2$. Entonces, la mejor constante de hiperbolicidad δ de S satisface $\delta \geq \Lambda(L_1, L_2)$, donde $\lim_{L_2 \rightarrow \infty} \Lambda(L_1, L_2) = \infty$, para todo L_1 fijo.*

Demostración. Denotemos por $M(L_1, L_2)$ el conjunto de superficies de Riemann que verifican las hipótesis de este corolario. Definimos $\Lambda(L_1, L_2)$ como el ínfimo de las constantes de hiperbolicidad de las superficies $S \in M(L_1, L_2)$.

Supongamos que no es cierta la conclusión del corolario. Puesto que $\Lambda(L_1, L_2)$ es una función no decreciente en L_2 , existe alguna constante c_1 tal que $\Lambda(L_1, L_2) < c_1$ para un cierto L_1 fijo y para todo L_2 . Para este L_1 y para cada L_2 podemos tomar $S \in M(L_1, L_2)$ con $\delta(S) \leq c_1$. Tal superficie S está contenida en alguna superficie de Riemann no excepcional triplemente conexa R con geodésicas simples cerradas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tal que γ_1 es libremente homótopa a g_1 (γ_1 puede ser una puntura) y $\partial R = \partial S \setminus \{g_1\}$; por tanto $L(\gamma_1) \leq L(g_1) \leq L_1$. Es obvio que γ_2, γ_3 son outer loops en R .

Consideremos la superficie de Riemann con borde no excepcional doblemente conexa S_0 definida como la clausura de $R \setminus S$. Tenemos que $S \cup S_0 = R$ y $S \cap S_0 = \partial S_0 = g_1$. Obtenemos $\delta(S_0) \leq c_2$ aplicando el Teorema 3.19. Ya que el par S, S_0 es una $(L_1, 0, 0)$ -descomposición en árbol de R , El Teorema 2.3 permite deducir que $\delta(R) \leq c_3$. Esto entra en contradicción con el Teorema 3.36, porque $\delta(R) \geq D(L_1, L_2)$. \square

Para el caso particular en el que los conjuntos E_n sean puntos aislados, se puede obtener un enunciado más sencillo que el del teorema 3.32; de hecho, se puede demostrar que S^* es hiperbólica si y sólo si S lo es, sin tener que considerar D_{S^*} . Vamos a necesitar una definición previa:

Definición 3.40. *Un conjunto E en una superficie de Riemann abierta no excepcional S se dice que es r -uniformemente separado si las bolas $\{B_S(p, r)\}_{p \in E}$ son disjuntas dos a dos.*

Teorema 3.41. *Sea S una superficie de Riemann abierta no excepcional y E un conjunto r -uniformemente separado en S . Entonces, $S^* := S \setminus E$ es δ^* -hiperbólico si y sólo si S es δ -hiperbólico. Además, δ^* (respectivamente δ) sólo depende de c, r y δ (respectivamente δ^*), donde c es la mejor constante tal que S tiene género c -amplio.*

La conclusión de este teorema no es cierta sin la hipótesis sobre E , ni siquiera para dominios planos: para convencernos, basta con considerar $S := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ (que es hiperbólico por el Teorema 3.17) y $S^* := \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^2$ (que no es hiperbólico, puesto que tiene un grupo de isometrías isomorfo a \mathbb{Z}^2).

Demostración. Asumamos para empezar que S tiene género c -amplio, para algún valor c . Para cada p , el conjunto de r 's tales que $\partial B(p, r)$ no es la unión de curvas simples cerradas (es decir, $\overline{B_S(p, r)}$ no es una superficie de Riemann con borde) es, a lo sumo, numerable. Puesto que E es a lo sumo numerable, el conjunto de r 's para los que $\overline{B_S(p, r)}$ no es una superficie de Riemann con borde para algún $p \in E$, es también, a lo sumo, numerable. Consideremos $r_0 < \frac{1}{2} \min\{c, r, \log 3\}$, tal que $\overline{B_S(p, r_0)}$ sea una superficie de Riemann con borde para todo $p \in E$.

Veamos ahora que E es un conjunto $(r_0, 2\pi \sinh r_0, 2)$ -uniformemente separado en S , con entornos normales $V_p := \overline{B_S(p, r_0)}$. Para todo $p \in E$, aplicando el Teorema 3.9 se tiene que $\overline{B_S(p, r_0)}$ es simple o doblemente conexa. Además, cada componente conexa de $\partial B_S(p, r_0)$ desconecta S : esto resulta evidente si $B_S(p, r_0)$ es simplemente conexa. En otro caso, existe una curva simple cerrada no trivial g en $B_S(p, r_0)$ de longitud menor que $2r_0 < c$, y, por tanto, g desconecta S ; se tiene la conclusión que buscamos porque toda curva simple cerrada no trivial contenida en $B_S(p, r_0)$ es libremente homótopa a g por el Teorema 3.9. También es cierto que $d_S(p, \partial B_S(p, r_0)) = r_0$ y $L_S(\partial B_S(p, r_0)) \leq 2\pi \sinh r_0$ para todo $p \in E$, y $d_S(B_S(p, r_0), B_S(q, r_0)) \geq r > r_0$, para todo $p \neq q$.

Por tanto, E es un conjunto $(r_0, 2\pi \sinh r_0, 2)$ -uniformemente separado en S , y el resultado se deduce del Corolario 3.33, puesto que aquí el papel de t es irrelevante.

Si S tiene género estrecho, entonces el Teorema 3.11 asegura que S no es hiperbólica. Si repetimos el razonamiento anterior tomando $r_1 < \frac{1}{2} \min\{r, \log 3\}$ comprobamos que E es un

conjunto $(r_1, 2\pi \sinh r_1, 2)$ -uniformemente separado en S (la dependencia de r_0 en c sólo se utiliza para demostrar que toda componente conexa de $\partial B_S(p, r_0)$ desconecta S). Por tanto, el Teorema 3.30 permite concluir que S^* no es hiperbólica. \square

Si consideramos $S^* := S \setminus \{p_1, p_2\}$, donde S es una superficie de Riemann abierta y $p_1, p_2 \in S$, hay ciertos invariantes conformes de S^* (p.e. el exponente de convergencia y la constante isoperimétrica) que degeneran cuando p_2 tiende a p_1 . Veamos ahora una consecuencia sorprendente del Teorema 3.41 acerca de la estabilidad de la hiperbolicidad.

Corolario 3.42. *Sea S una superficie de Riemann abierta no excepcional y δ -hiperbólica, con género c -amplio. Entonces, para cada número natural n existe una constante δ_n , que sólo depende de δ , c y n , tal que $S \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ es δ_n -hiperbólica, para todo $p_1, \dots, p_n \in S$.*

Demostración. Vamos a probar el teorema por inducción sobre n . El Teorema 3.41 proporciona directamente el resultado para $n = 1$ ($E = \{p_1\}$ es r -uniformemente separado para todo r). Asumamos ahora que la conclusión es cierta para $n - 1$; es decir, que $S^* := S \setminus \{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ es δ_{n-1} -hiperbólica, para todo $p_1, \dots, p_{n-1} \in S$.

Observemos que S^* tiene género c -amplio, puesto que $d_{S \setminus F} \geq d_S$ para todo conjunto cerrado $F \subset S$. Entonces, aplicando el Teorema 3.41, se tiene que $S^* \setminus \{p_n\}$ es δ_n -hiperbólica, donde δ_n es una constante que sólo depende de δ_{n-1} y c ($E = \{p_n\}$ es r -uniformemente separado para todo r). \square

Vamos a dar ahora una condición sencilla que implica que $D_{S^*} = \infty$, simplemente en términos de distancias en S .

Definición 3.43. *Sea S una superficie de Riemann abierta no excepcional y $E = \cup_n E_n$ un conjunto $(r, s, 2)$ -uniformemente separado en S . Para cada elección fija de $\{V_n\}_n$ denotamos por L el conjunto de índices n tal que ∂V_n tiene alguna componente conexa η_n con $S \setminus \eta_n$ conexa. Si $n \in L$, denotemos por $C(E_n)$ el conjunto de curvas γ que unen E_n consigo mismo, de forma que en $E_n \cup \gamma$ existe una curva σ con $S \setminus \sigma$ conexa. Definimos*

$$C_S(\{V_n\}_n) := \inf \{L_S(\gamma) : \gamma \in C(E_n) \text{ para algún } n\}.$$

Proposición 3.44. *Sea S una superficie de Riemann abierta no excepcional y $E = \cup_n E_n$ un conjunto $(r, s, 2)$ -uniformemente separado en S . Si, para una cierta elección de conjuntos $\{V_n\}_n$, se tiene que $C_S(\{V_n\}_n) = 0$, entonces $D_{S^*}(\{V_n\}_n) = \infty$.*

Demostración. Podemos elegir n_k y una geodésica γ_k que tenga longitud minimal en $C(E_{n_k})$, con $L_S(\gamma_k) = 4\varepsilon_k < r$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$. Si consideramos el recubridor universal, vemos que cualquier curva que una dos componentes conexas de ∂V_{n_k} en S^* tiene longitud mayor o igual que la curva más corta g_k de $\mathbb{D} \setminus \{i \tanh \varepsilon_k, -i \tanh \varepsilon_k\}$ que une $\{|z| = \tanh(r/4)\}$ consigo mismo y que interseca el segmento que une $i \tanh \varepsilon_k$ con $-i \tanh \varepsilon_k$ (observemos que $d_{\mathbb{D}}(-i \tanh \varepsilon_k, i \tanh \varepsilon_k) = 2d_{\mathbb{D}}(0, i \tanh \varepsilon_k) = 4\varepsilon_k$, por (1.5) (ver página 12). No es difícil comprobar que g_k es el intervalo $[-\tanh(r/4), \tanh(r/4)]$. Entonces

$$D_{S^*}(\{V_n\}_n) \geq \sup_k L_{\mathbb{D} \setminus \{i \tanh \varepsilon_k, -i \tanh \varepsilon_k\}}([-\tanh(r/4), \tanh(r/4)]).$$

Denotemos por D_t el disco de centro 0 y radio euclídeo t . Puesto que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} L_{\mathbb{D} \setminus \{i \tanh \varepsilon_k, -i \tanh \varepsilon_k\}}([-\tanh(r/4), \tanh(r/4)]) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} L_{D_{\coth \varepsilon_k} \setminus \{i, -i\}}([-\tanh(r/4) \coth \varepsilon_k, \tanh(r/4) \coth \varepsilon_k]) \\ &= L_{\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}}((-\infty, \infty)) = \infty, \end{aligned}$$

se tiene que $D_{S^*}(\{V_n\}_n) = \infty$. □

Capítulo 4

Futuras líneas de investigación

Para finalizar, expondremos futuras líneas de investigación, que son una continuación natural de los trabajos contenidos en esta tesis.

La caracterización de superficies de Riemann hiperbólicas continúa siendo un problema abierto. Dado que la clase de superficies de Riemann es un conjunto tan amplio de espacios que da lugar a una casuística tremendamente extensa, parece muy complicado encontrar una caracterización fácilmente verificable en todos los casos. Por tanto, resultará satisfactorio disponer de criterios suficientes que garanticen o descarten la hiperbolicidad.

Para enfrentarnos a este problema tenemos planificados dos enfoques:

1. El primero de ellos consiste en reducir el conjunto de superficies a estudiar. Evidentemente, a medida que vayamos reduciendo este conjunto podremos encontrar criterios más fácilmente verificables. De hecho, parece posible encontrar caracterizaciones en este contexto que constituyan una importante simplificación de los criterios hasta ahora existentes.

Para ser más concretos, estamos especialmente interesados en estudiar la hiperbolicidad de los dominios de Denjoy, o sea, dominios planos Ω con $\partial\Omega \subset \mathbb{R}$. Este tipo de superficies está cobrando cada vez más importancia en Teoría Geométrica de Funciones, ya que, por una parte, constituyen un tipo de superficies de Riemann muy generales, y, por otra, su simetría hace más sencillo su estudio. Esta estrategia ha demostrado ser útil por ejemplo en [3], donde se caracterizan los dominios de Denjoy que satisfacen la desigualdad isoperimétrica.

Desearíamos encontrar criterios de hiperbolicidad en términos de:

- a) Los dominios fundamentales.
 - b) El tamaño euclídeo de la frontera del dominio.
 - c) Las longitudes de una clase especial de geodésicas, denominadas fundamentales. Por este camino ya hemos conseguido algunos resultados.
2. Como una continuación directa de los resultados del capítulo anterior, intentaremos mejorar los teoremas que estudian el papel que juegan las punturas y los foniles en la hiperbolicidad.

En este sentido, estamos muy interesados en mejorar los resultados sobre hiperbolicidad uniforme de superficies de tipo finito en la clase $\mathcal{S}(a, l)$. En particular, nos gustaría poder demostrar que la conclusión del Teorema 3.19 sigue siendo cierta cuando sólo exigimos que las longitudes de todos los outer loops generalizados salvo quizás uno, es menor o igual que l .

Además del interés que este resultado tiene en sí mismo, nos permitiría eliminar una de las hipótesis del Teorema 3.32.

Creemos muy probable que tal resultado sea cierto; de hecho ya está probado para superficies triplemente conexas (ver Lema 3.20).

Bibliografía

- [1] L. Ahlfors, *Conformal invariants* McGraw-Hill, 1973.
- [2] L. Ahlfors, L. Sario, *Riemann surfaces*. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1960.
- [3] V. Alvarez, D. Pestana, J.M. Rodríguez, Isoperimetric inequalities in Riemann surfaces of infinite type, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **15** (1999), 353-427.
- [4] V. Alvarez, J.M. Rodríguez, V.A. Yakubovich, Subadditivity of p -harmonic “measure” on graphs, *Michigan Mathematical Journal* **49** (2001), 47-64.
- [5] Z.M. Balogh, S.M. Buckley, Geometric characterizations of Gromov hyperbolicity, *Invent. Math.* **153** (2003), 261-301.
- [6] L. Bers, An Inequality for Riemann Surfaces. Differential Geometry and Complex Analysis. H. E. Rauch Memorial Volume. Springer-Verlag. 1985.
- [7] M. Bonk, Quasi-geodesics segments and Gromov hyperbolic spaces, *Geometriae Dedicata* **62** (1996), 281-298.
- [8] M. Bonk, J. Heinonen, P. Koskela, Uniformizing Gromov hyperbolic spaces. Astérisque No. 270 (2001).
- [9] P. Buser, *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*. Birkhäuser, Boston, 1992.
- [10] A. Cantón, J.L. Fernández, D. Pestana, J.M. Rodríguez, On harmonic functions on trees, *Potential Analysis* **15** (2001), 199-244.
- [11] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. Academic Press, New York, 1984.
- [12] J. Cheeger, Finiteness theorems for Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.* **96** (1970), 61-74.
- [13] M. Coornaert, T. Delzant, A. Papadopoulos, *Notes sur les groupes hyperboliques de Gromov*. I.R.M.A., Strasbourg, 1989.
- [14] J.L. Fernández, J.M. Rodríguez, The exponent of convergence of Riemann surfaces. Bass Riemann surfaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Series AI* **15** (1990), 165-183.
- [15] J.L. Fernández, J.M. Rodríguez, Area growth and Green’s function of Riemann surfaces, *Arkiv för matematik* **30** (1992), 83-92.

- [16] E. Ghys, P. de la Harpe, Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov. Progress in Mathematics, Volume 83. Birkhäuser. 1990.
- [17] M. Gromov, Curvature, diameter and Betti numbers, *Comment Math. Helv.* **56** (1981), 179-195.
- [18] K. Grove, P. Petersen, Bounding homotopy types by geometry, *Ann. Math.* **128** (1988), 195-206.
- [19] K. Grove, P. Petersen, J.Y. Wu, Geometric finiteness theorems via controled topology, *Invent. Math.* **99** (1990), 205-213. Correction in *Invent. Math.* **104** (1991), 221-222.
- [20] I. Holopainen, P.M. Soardi, p -harmonic functions on graphs and manifolds, *Manuscripta Math.* **94** (1997), 95-110.
- [21] G.A. Jones, D. Singerman, *Complex functions. An algebraic and geometric viewpoint*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
- [22] M. Kanai, Rough isometries and combinatorial approximations of geometries of non-compact Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **37** (1985), 391-413.
- [23] M. Kanai, Rough isometries and the parabolicity of Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **38** (1986), 227-238.
- [24] M. Kanai, Analytic inequalities and rough isometries between non-compact Riemannian manifolds. Curvature and Topology of Riemannian manifolds (Katata, 1985). Lecture Notes in Math. **1201**. Springer (1986), 122-137.
- [25] S.G. Krantz, Complex analysis: the geometric viewpoint, *The Mathematical Association of America* (1990).
- [26] J. Ortega, K. Seip, Harmonic measure and uniform densities. Preprint.
- [27] F. Paulin, On the critical exponent of a discrete group of hyperbolic isometries. *Diff. Geom. Appl.* **7** (1997), 231-236.
- [28] A. Portilla, J.M. Rodríguez, E. Tourís, Gromov hyperbolicity through decomposition of metric spaces II, *J. Geom. Anal.* **14** (2004), 123-149.
- [29] A. Portilla, J.M. Rodríguez, E. Tourís, The topology of balls and Gromov hyperbolicity of Riemann surfaces. *Diff. Geom. Appl.* **21** (2004), 317-335
- [30] A. Portilla, J.M. Rodríguez, E. Tourís, The role of funnels and punctures in the Gromov hyperbolicity of Riemann surfaces. Aceptado en *Proc. Edimb. Math. Soc.*
- [31] B. Randol, Cylinders in Riemann surfaces, *Comment. Math. Helv.* **54** (1979), 1-5.
- [32] J.M. Rodríguez, Isoperimetric inequalities and Dirichlet functions of Riemann surfaces, *Publicacions Matemàtiques* **38** (1994), 243-253.

-
- [33] J.M. Rodríguez, Two remarks on Riemann surfaces, *Publicacions Matemàtiques* **38** (1994), 463-477.
 - [34] J.M. Rodríguez, E. Tourís, Gromov hyperbolicity through decomposition of metric spaces, *Acta Math. Hung.* **103** (2004), 53-84.
 - [35] J.M. Rodríguez, E. Tourís, A new characterization of Gromov hyperbolicity for Riemann surfaces. Preprint.
 - [36] J.M. Rodríguez, E. Tourís, Gromov hyperbolicity of Riemann surfaces. Aceptado en *Acta Math. Sinica*.
 - [37] H. Shimizu, On discontinuous groups operating on the product of upper half-planes, *Ann. of Math.* **77** (1963), 33-71.
 - [38] P.M. Soardi, Rough isometries and Dirichlet finite harmonic functions on graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* **119** (1993), 1239-1248.
 - [39] D. Sullivan, Related aspects of positivity in Riemannian Geometry. *J. Diff. Geom.* **25** (1987), 327-351.